MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE din ROMÂNIA filiala Dolj

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ

COLEGIUL NAȚIONAL ”FRAȚII BUZEȘTI” CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ

GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a X-a Craiova, 1 noiembrie 2008

Clasa a XII-a

Soluții:

1. a) Având o mulțime cu 2008 elemente, cel mai simplu e să definim o bijecție între G și $\mathcal{Z}_{2008}$. Un exemplu la îndemână este $f:\mathcal{Z}_{2008}\to G$, $f(\widehat{a})=\sqrt{a+1}$, $a\in\{0,1,\dots,2007\}$ iar operația care se obține este $x*y=\sqrt{x^2\oplus y^2}$ unde $\oplus$ este adunarea modulo 2008 pe mulțimea $\mathcal{R}_{2008}=\{0,1,\dots,2007\}$

   b) Considerăm $f:G\to G$, $f(x)=ax$

   f este injectivă $\Leftrightarrow$ f este surjectivă $\Leftrightarrow$ $\forall y\in G\quad \exists x\in G$ a.î. $ax=y$

   Alegem $e\in G$, deci există $x\in G$: $ax=e$.

   Cazul 1: $a'\neq a$; deci, din ipoteză, $(a')^2=e$, rezultă $a^2=e$.

   Cazul 2: $a'=a$, ceea ce implică $a^2=e$.

2. Dacă f ar admite primitive atunci ar avea proprietatea lui Darboux. Cum f e injectivă și are proprietatea lui Darboux rezultă că f este strict monotonă.

   Presupunând că f este strict descrescătoare, rezultă că $f\circ f$ e strict crescătoare iar $g(x)=2f(x)-11x$ este strict descrescătoare. Deci egalitatea nu poate avea loc.

   Presupunând că f este strict crescătoare, rezultă $f\circ f\circ f$ este strict crescătoare

   $(f\circ f\circ f)(x)=2f(f(x))-11f(x)=2(2f(x)-11x)-11f(x)=-7f(x)-22x$

   $g(x)=-7f(x)-22x\qquad g$ e strict descrescătoare.

   Deci egalitatea nu poate avea loc.

   În concluzie f nu admite primitive.

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty} xF\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{F(y)-F(0)}{y-0}=F'(0)=f(0)$

   b) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} nF\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)$, pentru orice $a\in(0,f(0))$, există $n_1\in\mathcal{N}^*$ pentru care $\sqrt{n}F\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>a$, $\forall n>n_1$

   $F\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>\frac{a}{\sqrt{n}}$, $\forall n>n_1$

   Atunci:

   $\sum\limits_{k=1}^{n}F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n_1}F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\sum\limits_{k=n_1+1}^{n}F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)>\sum\limits_{k=1}^{n_1}F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+a\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-a\sum\limits_{k=1}^{n_1}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sum\limits_{k=1}^{n_1}F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+a\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-a\sum\limits_{k=1}^{n_1}\frac{1}{\sqrt{k}}$, $\forall n>n_1$

   Cum $\lim\limits_{n\to\infty} a\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=+\infty$