

CONCURSUL DE MATEMATICĂ

GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a X-a Craiova, 1 noiembrie 2008
Clasa a XII-a

Soluții:

1. a) Având o mulțime cu 2008 elemente, cel mai simplu e să definim o bijecție între G și \mathcal{Z}_{2008} . Un exemplu la îndemână este $f : \mathcal{Z}_{2008} \rightarrow G$, $f(\hat{a}) = \sqrt{a+1}$, $a \in \{0, 1, \dots, 2007\}$ iar operația care se obține este $x * y = \sqrt{x^2 \oplus y^2}$ unde \oplus este adunarea modulo 2008 pe mulțimea $\mathcal{R}_{2008} = \{0, 1, \dots, 2007\}$
- b) Considerăm $f : G \rightarrow G$, $f(x) = ax$
 f este injectivă $\Leftrightarrow f$ este surjectivă $\Leftrightarrow \forall y \in G \quad \exists x \in G$ a.î. $ax = y$
 Alegem $e \in G$, deci există $x \in G$: $ax = e$.
 CAZUL 1: $a' \neq a$; deci, din ipoteză, $(a')^2 = e$, rezultă $a^2 = e$.
 CAZUL 2: $a' = a$, ceea ce implică $a^2 = e$.
2. Dacă f ar admite primitive atunci ar avea proprietatea lui Darboux. Cum f e injectivă și are proprietatea lui Darboux rezultă că f este strict monotonă.
 Presupunând că f este strict descrescătoare, rezultă că $f \circ f$ e strict crescătoare iar $g(x) = 2f(x) - 11x$ este strict descrescătoare. Deci egalitatea nu poate avea loc.
 Presupunând că f este strict crescătoare, rezultă $f \circ f \circ f$ este strict crescătoare
 $(f \circ f \circ f)(x) = 2f(f(x)) - 11f(x) = 2(2f(x) - 11x) - 11f(x) = -7f(x) - 22x$
 $g(x) = -7f(x) - 22x$ g e strict descrescătoare.
 Deci egalitatea nu poate avea loc.
 În concluzie f nu admite primitive.
3. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} xF\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(y) - F(0)}{y - 0} = F'(0) = f(0)$
- b) Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} nF\left(\frac{1}{n}\right) = f(0)$, pentru orice $a \in (0, f(0))$, există $n_1 \in \mathcal{N}^*$ pentru care $\sqrt{n}F\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > a$,
 $\forall n > n_1$
 $F\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > \frac{a}{\sqrt{n}}$, $\forall n > n_1$
 Atunci:
 $\sum_{k=1}^n F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=1}^{n_1} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sum_{k=n_1+1}^n F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) > \sum_{k=1}^{n_1} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + a \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - a \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n_1} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + a \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - a \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $\forall n > n_1$
 Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} a \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$ rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = +\infty$