MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE
INSPECTORARUL ŞCOLAR JUDEȚEAN DOLJ din ROMÂNIA filiala DOLJ
COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEŞTI" CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a X-a

Craiova, 1 noiembrie 2008

Clasa a XI-a

1. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ şi $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ astfel încât $A^2 = I_n + B^2$.
a) Dacă n este număr natural impar atunci arătați că $\det(AB - BA) = 0$.
b) Dacă n este număr natural par atunci dați exemple de două matrici A, B care verifică condiția de mai sus şi $\det(AB - BA) \neq 0$.
(*Enunț modificat*)

Prof. Mihai Opincariu, G.M. 5-6/2008

2. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale strict pozitive, căruia îi ataşăm şirul $(b_n)_{n \geq 0}$ definit prin $b_n = a_n(a_{n+1} - a_n)$. Se cere:
a) Dați exemple de şiruri $(a_n)_{n \geq 0}$ care au limita ∞ astfel încât limita şirului $(b_n)_{n \geq 0}$ să fie egală cu 0 sau cu $b > 0$ sau cu ∞.
b) Arătați că dacă şirul $(b_n)_{n \geq 0}$ converge la un număr real strict pozitiv atunci şirul $\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 0}$ este de asemenea convergent.

Prof. Mihai Dicu, Craiova

3. Arătați că există un număr real strict pozitiv unic a astfel încât să aibă loc dubla inegalitate

$$\frac{1}{n}(an)^n < (n+1)(n+2)\ldots 2n < 2n(an)^n, \ (\forall)\, n \geq 2.$$

Generalizare.

Prof. Mihai Dicu, Craiova

(*Selecție realizată de prof. Mihai Dicu*)

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore.