

## Solutii XI

1. a) Calculăm  $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 = I_n - AB + BA$  și apoi  $(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 = I_n + AB - BA$ . Ținând seama de lema:

Dacă  $X, Y$  sunt două matrice pătrate atunci  $\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$ , rezultă că  $\det(AB - BA) = \det(BA - AB)$  și apoi, din imparitatea lui  $n$  avem concluzia.

b) Pentru  $n$  par se consideră  $A$  matricea având toate elementele de pe diagonala secundară egale cu 1 și în consecință  $A^2 = I_n$  și  $B$  matricea având pe diagonala secundară doar primele  $n/2$  elemente egale cu 1 și în consecință  $B^2 = O_2$ . Pe de altă parte  $\det(AB - BA) = (-1)^{n/2} \neq 0$ .

2. a) Pentru  $a_n = n$  avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ , pentru  $a_n = \sqrt{2bn}$  avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  iar pentru  $a_n = \ln n$  avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

b) Să observăm că relația dată se scrie sub forma  $a_{n+1} = a_n + b_n / a_n$ . Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$  atunci  $(\exists) n_0 \in \mathbf{N}$  astfel încât  $(\forall) n \geq n_0, b_n > 0$  sau  $a_{n+1} - a_n > 0$ . Asta înseamnă că șirul  $(a_n)_n$  este monoton crescător pentru  $n \geq n_0$  și în consecință  $(\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ .

Presupunând că  $a \in \mathbf{R}$  trecând la limită avem  $a = a + b/a$  ceea ce este fals și în consecință  $a = \infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n / a_n = 0$ . Pe de altă parte ridicând relația dată la pătrat avem egalitatea

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2b_n + b_n^2 / a_n^2 \text{ și prin trecere la limită găsim } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2) = 2b.$$

Aplicând lema lui Stolz-Cesaro se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \sqrt{n} = \sqrt{2a}$ , adică  $(a_n / \sqrt{n})_n$  este convergent.

3. În ipoteza că  $a$  există, inegalitatea din enunț se poate scrie sub forma

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \cdot a < [(n+1)(n+2) \dots 2n]^{1/n} / n < (2n)^{1/n} \cdot a.$$

Admițând că  $a$  există, prin trecere la limită găsim  $a = 4/e$  și astfel demonstrăm unicitatea.

Existența lui  $a$  se justifică demonstrând dubla inegalitate prin inducție.

Generalizarea se obține plecând de o inegalitate cunoscută:

$$e(n/e)^n < n! < ne(n/e)^n, (\forall) n \geq 2 \quad (*)$$

care, după substituțiile  $n \rightarrow kn$  și  $n \rightarrow (k-1)n$ ,  $k \geq 2$ , se scrie sub formele:

$$e(kn/e)^{kn} < (kn)! < (kn)e(kn/e)^{kn} \quad (1)$$

$$e[(k-1)n/e]^{(k-1)n} < [(k-1)n]! < (k-1)ne[(k-1)n/e]^{(k-1)n} \quad (2)$$

Inversând a doua inegalitate și apoi înmulțind-o cu prima avem:

$$(an)^n / (k-1)n < [(k-1)n+1] \cdot [(k-1)n+2] \dots [kn-1] \cdot kn < kn \cdot (an)^n$$

unde  $a = (1/e) \cdot k^k / (k-1)^{k-1}$ .