Solutii XI

1. a) Calculăm $(A + B) (A – B) = A^2 – AB + BA – B^2 = I_n – AB + BA$ şi apoi $(A - B) (A + B) = A^2 +AB - BA –B^2 = I_n + AB – BA$. Ținând seama de lema:
Dacă X, Y sunt două matrice pătrate atunci $\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$, rezultă că $\det(AB –BA) = \det(BA - AB)$ şi apoi, din imparitatea lui n avem concluzia.
b) Pentru n par se consideră A matricea având toate elementele de pe diagonala secundară egale cu 1 şi în consecință $A^2 = I_n$ şi B matricea având pe diagonala secundară doar primele n/2 elemente egale cu 1 şi în consecință $B^2 = O_2$. Pe de altă parte $\det(AB–BA) = (-1)^{n/2} \neq 0$.

2. a) Pentru $a_n = n$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, pentru $a_n = \sqrt{2bn}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ iar pentru $a_n = \ln n$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
b) Să observăm că relația dată se scrie sub forma $a_{n+1} = a_n + b_n / a_n$ .Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b > 0$ atunci $(\exists)n_o \in \mathbf{N}$ astfel încât $(\forall) n \geq n_o, b_n > 0$ sau $a_{n+1} - a_n > 0$. Asta înseamnă că şirul $(a_n)_n$ este monoton crescător pentru $n \geq n_o$ şi în consecință $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$.
Presupunând că $a \in \mathbf{R}$ trecând la limită avem $a = a + b/a$ ceea ce este fals şi în consecință $a = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n / a_n = 0$. Pe de altă parte ridicând relația dată la pătrat avem egalitatea $a^2_{n+1} = a^2_n + 2 b_n + b^2_n / a^2_n$ şi prin trecere la limită găsim $\lim\limits_{n\to\infty} (a^2_{n+1} - a^2_n) = 2b$.
Aplicând lema lui Stolz-Cesaro se obține $\lim\limits_{n\to\infty} a_n / \sqrt{n} = \sqrt{2a}$, adică $(a_n / \sqrt{n})_n$ este convergent.

3. În ipoteza că *a* există, inegalitatea din enunț se poate scrie sub forma

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \cdot a < [(n + 1) (n + 2) \ldots 2n]^{1/n}/n < (2n)^{1/n} \cdot a .$$

Admițând că *a* există, prin trecere la limită găsim $a = 4/e$ şi astfel demonstrăm unicitatea.
Existența lui *a* se justifică demonstrând dubla inegalitate prin inducție.
Generalizarea se obține plecând de o inegalitate cunoscută:

$$e(n/e)^n < n! < ne (n/e)^n, (\forall) n \geq 2 \qquad (*)$$

care, după substituțiile $n\to kn$ şi $n\to (k – 1)n$, $k \geq 2$, se scrie sub formele:

$$e(kn/e)^{kn} < (kn)! < (kn)e (kn/e)^{kn} \qquad (1)$$

$$e[(k-1)n/e]^{(k-1)n} < [(k -1)n]! < (k -1)ne [(k-1)n/e]^{(k-1)n} \qquad (2)$$

Inversând a doua inegalitate şi apoi înmulțind-o cu prima avem:

$$(an)^n /(k-1)n < [(k-1)n +1]\cdot[(k-1)n +2]\cdots [kn -1]\cdot kn < kn\cdot(an)^n$$

unde $a = (1/e) \cdot k^k/ (k-1)^{k-1}$.