

## Soluții X

1. a) Observăm că dacă  $z_1 = 0$  atunci și  $z_2 = z_3 = 0$  și egalitatea este îndeplinită. Ținând seama de acest lucru putem presupune că  $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_3 \neq 0$ . Este suficient să arătăm că  $|z_2| = |z_3| = |z_1|$ . Deoarece  $z_2 + z_3 = -z_1$  și  $z_1(z_2 + z_3) + z_2 \cdot z_3 = 0$  atunci  $z_2 \cdot z_3 = -z_1^2$  și apoi  $|z_2| \cdot |z_3| = |z_1^2|$  și de asemenea  $|z_1| \cdot |z_3| = |z_2^2|, |z_1| \cdot |z_2| = |z_3^2|$ . Împărțind membru cu membru primele două egalități avem  $|z_1|^3 = |z_2|^3$  de unde  $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ . Cu aceasta avem  $|z_1| + \omega \cdot |z_2| + \omega^2 \cdot |z_3| = |z_1| (1 + \omega + \omega^2) = 0$ .

b) Avem  $\sqrt{(x+n)(y+n)} \geq n + \sqrt{xy}$ , ( $\forall$ )  $n, x, y > 0$  (care se demonstrează prin ridicare la pătrat) cu egalitate pentru  $x = y$ . Aplicând inegalitatea de mai sus avem

$$\sqrt{(b+1)(c+1)} \geq 1 + \sqrt{bc} \iff \log_a (\sqrt{(b+1)(c+1)} - 1) \geq \log_a \sqrt{bc} \iff$$

$$\log_a (\sqrt{(b+1)(c+1)} - 1) \geq \frac{1}{2} (\log_a b + \log_a c) \text{ și analog}$$

$$\log_b (\sqrt{(c+1)(a+1)} - 1) \geq \frac{1}{2} (\log_b c + \log_b a)$$

$$\log_c (\sqrt{(a+1)(b+1)} - 1) \geq \frac{1}{2} (\log_c a + \log_c b).$$

Adunând cele trei inegalități găsim

$$\log_a (\sqrt{(b+1)(c+1)} - 1) + \log_b (\sqrt{(c+1)(a+1)} - 1) + \log_c (\sqrt{(a+1)(b+1)} - 1) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} (\log_a b + \log_a c + \log_b c + \log_b a + \log_c a + \log_c b) \geq 3, \text{ aplicând și } x + 1/x \geq 2 \text{ pt. } x > 0.$$

$$2. \text{ Avem } 10^{100} = (5 + 2 \cdot 2,5)^{100} > (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{200} = (5 + 2\sqrt{6})^{100} > (5 + 2 \cdot 2,4)^{100} > 9,8^{100}.$$

$$\text{Vom arăta acum că } 9,8^{100} > 10^{99} \iff 9,8 > (10/9,8)^{99} \iff 9,8 > (50/49)^{99} = (1 + 1/49)^{49}.$$

$$(1 + 1/49)^{49} (1 + 1/49). \text{ Cum } (1 + 1/49)^{49} < 3 \text{ arătăm că } 3 \cdot 3 \cdot (1 + 1/49) < 9,8 \text{ adică}$$

$$45 \cdot 50 < 49^2. \text{ Din } 10^{99} < (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{200} < 10^{100} \text{ rezultă că numărul respectiv are 100 cifre.}$$

$$3. \text{ Avem } f(x, y, z) = [\sin x + \sin(y - z)] + [\sin y + \sin(z - x)] + [\sin z + \sin(x - y)] =$$

$$2 \cdot \sin(x + y - z)/2 \cdot \cos(x - y + z)/2 + 2 \cdot \sin(-x + y + z)/2 \cdot \cos(x + y - z)/2 + 2 \cdot \sin(x - y + z)/2$$

$$\cdot \cos(-x + y + z)/2. \text{ Notând } (x + y - z)/2 = a, (y + z - x)/2 = b, (z + x - y)/2 = c \text{ avem}$$

$$f(x, y, z) = E(a, b, c) = 2(\sin a \cdot \cos b + \sin c \cdot \cos a + \sin b \cdot \cos c). \text{ Aplicând inegalitatea}$$

$$\text{SCB rezultă că } E^2(a, b, c) = 4(\sin a \cdot \cos b + \sin c \cdot \cos a + \sin b \cdot \cos c)^2 \leq$$

$$\leq 4(\sin^2 a + \cos^2 a + \cos^2 c) \cdot (\cos^2 b + \sin^2 c + \sin^2 b) = 4(1 + \cos^2 c)(1 + \sin^2 c) \leq$$

$$= 4(1 + \sin^2 c + \cos^2 c + \sin^2 c \cdot \cos^2 c) = 4(2 + \sin^2 c \cdot \cos^2 c) = 8 + \sin^2 2c \leq 9. \text{ De aici}$$

$$\text{rezultă că } f^2(x, y, z) \leq 9 \text{ sau } -3 \leq f(x, y, z) \leq 3. \text{ Cum } f(-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2) = -3 \text{ și}$$

$$f(\pi/2, \pi/2, \pi/2) = 3 \text{ concluzionăm ca minimul lui } f \text{ este } -3 \text{ iar maximul este } 3.$$