Soluții X

1. a) Observăm că dacă $z_1= 0$ atunci şi $z_2 = z_3 = 0$ şi egalitatea este îndeplinită. Ținând seama de acest lucru putem presupune că $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_3 \neq 0$. Este suficient să arătăm că $| z_2 | =| z_3 | = | z_1 |$. Deoarece $z_2 + z_3 = - z_1$ şi $z_1(z_2 + z_3) + z_2 \cdot z_3 = 0$ atunci $z_2 \cdot z_3 = - z_1^2$ şi apoi $| z_2 | \cdot| z_3 | = | z_1^2|$ şi de asemenea $| z_1 | \cdot| z_3 | = | z_2^2|$, $| z_1 | \cdot| z_2 | = | z_3^2|$. Împărțind memebru cu membru primele două egalități avem $| z_1 |^3 =| z_2 |^3$ de unde $z_1 | =| z_2 | = | z_3 |$. Cu aceasta avem $| z_1 | + \omega\cdot| z_2 | +\omega^2 | z_3 | = | z_1 | (1 + \omega +\omega^2) = 0$.

b) Avem $\sqrt{(x+n)(y+n)} \geq n + \sqrt{xy}$, ($\forall$) n, x, y > 0 (care se demonstrează prin ridicare la pătrat) cu egalitate pentru x = y. Aplicând inegalitatea de mai sus avem

$\sqrt{(b+1)(c+1)} \geq 1 + \sqrt{bc} \Longleftrightarrow \log_a (\sqrt{(b+1)(c+1)} - 1) \geq \log_a \sqrt{bc} \Longleftrightarrow$

$\log_a (\sqrt{(b+1)(c+1)} - 1) \geq ½ (\log_a b + \log_a c)$ şi analog

$\log_b (\sqrt{(c+1)(a+1)} - 1) \geq ½ (\log_b c + \log_b a)$

$\log_c (\sqrt{(a+1)(b+1)} - 1) \geq ½ (\log_c a + \log_c b)$.

Adunând cele trei inegalități găsim

$\log_a (\sqrt{(b+1)(c+1)} - 1) + \log_b (\sqrt{(c+1)(a+1)} - 1) + \log_c (\sqrt{(a+1)(b+1)} - 1) \geq$

$\geq ½(\log_a b + \log_a c + \log_b c + \log_b a + \log_c a + \log_c b) \geq 3$, aplicând şi $x + 1/x \geq 2$ pt. $x > 0$.

2. Avem $10^{100} = (5 + 2\cdot2,5)^{100} > (\sqrt{2} +\sqrt{3})^{200} = (5 + 2\sqrt{6})^{100} > (5 + 2\cdot2,4)^{100} > 9,8^{100}$. Vom arăta acum că $9,8^{100} > 10^{99} \Longleftrightarrow 9,8 > (10/9,8)^{99} \Longleftrightarrow 9,8 > (50/49)^{99} = (1 + 1/49)^{49}\cdot (1 + 1/49)^{49}(1 + 1/49)$. Cum $(1 + 1/49)^{49} < 3$ arătăm că $3\cdot3\cdot (1 + 1/49) < 9,8$ adică $45\cdot50 < 49^2$. Din $10^{99} < (\sqrt{2} +\sqrt{3})^{200} < 10^{100}$ rezultă că numărul respectiv are 100 cifre.

3. Avem $f(x, y, z) = [\sin x + \sin (y - z)] + [\sin y + \sin (z - x)] + [\sin z + \sin (x - y)] = 2\cdot \sin(x + y - z)/2\cdot\cos(x - y + z)/2 + 2\cdot\sin(- x + y + z)/2\cdot\cos(x+ y - z)/2 + 2\cdot\sin(x -y +z)/2 \cdot\cos(- x +y +z))/2$. Notând $(x + y - z)/2 = a$, $(y + z - x)/2 = b$, $(z +x -y)/2 =c$ avem $f(x, y, z) = E (a, b, c) = 2 (\sin a\cdot\cos b+ \sin c\cdot\cos a + \sin b\cdot \cos c)$. Aplicând inegalitatea SCB rezultă că $E^2 (a, b, c) = 4 (\sin a\cdot\cos b+ \sin c\cdot\cos a + \sin b\cdot \cos c)^2 \leq$

$\leq 4 (\sin^2 a + \cos^2 a + \cos^2 c)\cdot (\cos^2 b + \sin^2 c + \sin^2 b) = 4 (1 + \cos^2 c) (1 + \sin^2 c) \leq$

$= 4 (1 + \sin^2 c + \cos^2 c + \sin^2 c \cdot \cos^2 c) = 4 (2 + \sin^2 c \cdot \cos^2 c) = 8 + \sin^2 2c \leq 9$. De aici rezultă că $f^2 (x, y, z) \leq 9$ sau $-3 \leq f(x, y, z) \leq 3$. Cum $f (-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2) = -3$ şi $f (\pi/2, \pi/2, \pi/2) = 3$ concluzionăm ca minimul lui f este –3 iar maximul este 3.