MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORARUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ
COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEȘTI" CRAIOVA

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE din ROMÂNIA filiala DOLJ

CONCURSUL DE MATEMATICĂ GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a X-a

Craiova, 1 noiembrie 2008

Clasa a IX-a

1. Fie *ABCDE* un pentagon înscris într-un cerc și H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, respectiv, ortocentrele triunghiurilor *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEA* și *EAB*. Demonstrați că patrulaterele H_1H_2DA, H_2H_3EB, H_3H_4AC, H_4H_5BD, H_5H_1CE sunt paralelograme.

Prof. Marin Cherciu, G.M. 3/2007

2. Prin $[\,x\,]$ notăm partea întreagă a numărului real x.

a) Dacă $a, b \in (0, \infty)$ atunci arătați că

$$a + \left[\frac{a}{b}\right] = b + \left[\frac{b}{a}\right] \Leftrightarrow a = b;$$

b) Arătați că există o infinitate de perechi (a, b) de numere negative diferite și o infinitate de perechi (a, b) de numere de semne contrare astfel încât

$$a + \left[\frac{a}{b}\right] = b + \left[\frac{b}{a}\right].$$

Prof. Mihai Dicu, Craiova

3. Fie numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_k^2 \geq a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, $(\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Arătați că:

a) $a_k \cdot a_{n-k} \geq a_o \cdot a_n$, $(\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$;

b) $(a_o + a_1 + \ldots + a_{n-1}) \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \geq n^2 \cdot a_o \cdot a_n$.

(***)

(*Selecție realizată de prof. Daniela Grama*)

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore.