

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a X-a
Craiova, 1 noiembrie 2008

Clasa a IX-a

1. Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-un cerc și H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 , respectiv, ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDE, DEA și EAB . Demonstrați că patruleterele $H_1H_2DA, H_2H_3EB, H_3H_4AC, H_4H_5BD, H_5H_1CE$ sunt paralelograme.

Prof. Marin Cherciu, G.M. 3/2007

2. Prin $[x]$ notăm partea întreagă a numărului real x .

a) Dacă $a, b \in (0, \infty)$ atunci arătați că

$$a + \left[\frac{a}{b} \right] = b + \left[\frac{b}{a} \right] \Leftrightarrow a = b;$$

b) Arătați că există o infinitate de perechi (a, b) de numere negative diferite și o infinitate de perechi (a, b) de numere de semne contrare astfel încât

$$a + \left[\frac{a}{b} \right] = b + \left[\frac{b}{a} \right].$$

Prof. Mihai Dicu, Craiova

3. Fie numerele reale strict pozitive a_1, a_2, \dots, a_n astfel încât $a_k^2 \geq a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, $(\forall) k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Arătați că:

a) $a_k \cdot a_{n-k} \geq a_0 \cdot a_n$, $(\forall) k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$;

b) $(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq n^2 \cdot a_0 \cdot a_n$.

(***)

(*Selecție realizată de prof. Daniela Grama*)

**Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore.**