Soluții IX

1. Notăm cu O centrul cercului circumscris pentagonului ABCDE. Aplicând relația lui Sylvester în triunghiurile date în enunț avem $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ şi celelalte. Apoi $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD}$, de unde rezultă că H_1H_2DA este paralelogram. Se procedează asemănător pentru celelalte patrulatere.

2. a) „$\Rightarrow$" Demonstrăm prin reducere la absurd:

Dacă am avea $a < b$ atunci din $[\frac{a}{b}] = 0$ şi $[\frac{b}{a}] \geq 1$ rezultă că egalitatea $a + 0 = b + [\frac{b}{a}]$ este falsă.

Dacă am avea $a > b$ atunci din $[\frac{b}{a}] = 0$ şi $[\frac{a}{b}] \geq 1$ rezultă de asemenea contradicție.

Implicația „$\Leftarrow$" este evidentă.

b) 1) Căutăm $a < b < 0$, $a, b \in \mathbf{Q}$ astfel încât $a/b = k \in \mathbf{Z}_+$, $k > 1$. Avem $a = kb$ şi cum $0 < b/a < 1$ rezultă că $[\frac{b}{a}] = 0$ şi relația devine $bk + k = b$. Cu acestea $b = -k/(k-1)$ şi $a = -k^2/(k-1)$, $k \in \mathbf{Z}_+$, $k > 1$. Numerele găsite verifică relația din enunț.

2) Căutăm $a < 0 < b$, $a, b \in \mathbf{Q}$ astfel încât $b/a = k \in \mathbf{Z}_-$, $k < 0$. Avem $b = ak$ şi $a + [\frac{1}{k}] = ak + k$. Cum $-1 \leq k < 0$ atunci $[\frac{1}{k}] = -1$ şi avem, de fapt, $a - 1 = ak + k$ şi de aici $a = (k+1)/(k-1)$ şi $b = k(k+1)/(k-1)$, $k \in \mathbf{Z}_-$, $k < 0$, valori care verifică relația respectivă.

3. a) Pentru $k = 0$ sau $k = n$ este evident.

Pentru $k \in \{1, 2, ..., [n/2]\}$ procedăm în felul următor:

Dacă $i < j$ atunci $a_i^2 \geq a_{i-1} \cdot a_{i+1}, \dots, a_j^2 \geq a_{j-1} \cdot a_{j+1}$. Înmulțind aceste inegalități, membru cu membru, obținem $a_i \cdot a_j \geq a_{i-1} \cdot a_{j+1}$. Particularizând $i = k$ şi $j = n-k$ avem $a_k \cdot a_{n-k} \geq a_{k-1} \cdot a_{n-k+1}$. Prin aplicare succesivă avem $a_k \cdot a_{n-k} \geq a_o \cdot a_n$.

b) Din $a_k \geq a_o \cdot a_n / a_{n-k}$, prin adunare se obține $a_o + a_1 + \dots + a_n \geq a_o \cdot a_n (1/a_{n-1} + \dots + 1/a_o)$. Dar $(a_o + a_1 + \dots + a_{n-1})(1/a_o + \dots + 1/a_o \, 1/a_{n-1}) \geq n^2$. Din aceste două inegalități rezultă inegalitatea cerută.