CONCURSUL DE MATEMATICĂ
"GHEORGHE DUMITRESCU" EDIȚIA a X-a
CRAIOVA, 1 NOIEMBRIE 2008

Clasa a IV-a

1. Aflați x din egalitatea: $\{[(x-3):2005+2005]:2006+2006\}:2007+2007=2008$ ***prof.Nicolae Ivăşchescu, Craiova***

2. Suma a două numere naturale este 2008. Să se afle cele două numere ştiind că împărțind suma celor două numere la diferența lor obținem câtul 334 şi restul 4. ***prof.Nicolae Ivăşchescu, Craiova***

3. Este posibil să punem 6 bile în trei cutii astfel încât în fiecare cutie să fie cel puțin o bilă şi să nu existe două cutii cu acelaşi număr de bile? Dar 15 bile în 5 cutii? Dar 20 de bile în 6 cutii? Dar 4950 de bile în 99 de cutii? (în aceleaşi condiții) ***prof.Nicolae Ivăşchescu, Craiova***

Clasa a V-a

1. Reconstituiți înmulțirea: $\overline{aaaa}\times\overline{aaaa}=\overline{aaabcccd}$. ***prof.Nicolae Ivăşchescu, Craiova***

2. 1) Calculați: $a=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4$.

2) Verificați următoarele egalități şi aflați a: $3a=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot3+3\cdot4\cdot3=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot(4-1)+3\cdot4\cdot(5-2)$ $=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4-1\cdot2\cdot3+3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4=3\cdot4\cdot5$

3) Folosind 2) calculați: $b=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5$

• Verificați că $b=(1+2+3+4)+(1^2+2^2+3^2+4^2)$

4) Calculați $S=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+98\cdot99+99\cdot100$

5) Calculați $1^2+2^2+3^2+\ldots+99^2$. ***prof.Nicolae Ivăşchescu, Craiova***

3. Doi jucători iau pe rând dintr-un pachet cu 22 de cărți de joc cel mult 6 cărți. Câştigă cel care ia ultima dată cărți.

a) Cum trebuie să joace primul jucător astfel încât să câştige? (Câte cărți ia prima dată şi-n continuare?)

b) Cum trebuie să joace primul jucător pentru a câştiga, dacă se iau cel mult 8 cărți? ***prof.Nicolae Ivăşchescu, Craiova***

Clasa a VI-a

1. Numerele naturale prime a, b, c, se numesc ,,trigemene" dacă b–a=c–b=2. Găsiți toate tripletele de numere trigemene. ***prof.Nicolae Ivăşchescu, Craiova***

2. Să se calculeze c.m.m.m.c. al numerelor: $A=2n+4m+6p+3$, $B=3n+6m+9p+4$, $m, n, p\in\mathbf{N}$. ***prof.Nicolae Ivăşchescu, Craiova***

3. Un greier ,,neobosit" se află pe axa numerelor întregi în punctul P de coordonată 2009 (P(2009)). El face o săritură de cinci unități în sensul pozitiv şi apoi una de opt unități în sensul negativ şi continuă.

a) Aflați numărul de sărituri necesare pentru a se afla la cea mai mică distanță față de origine.

b) După a câta săritură va fi în mijlocul segmentului determinat de punctele A(998) şi B(2000)?

prof.Ion Pătraşcu, Craiova

Clasa a VII-a

1. Fie $\frac{a}{b}$ o fracție ireductibilă subunitară.

1) **a)** Arătați că există numerele naturale q şi r astfel ca: $\frac{a}{b}=\frac{1}{q}-\frac{r}{b\cdot q}$ şi r<a.

b) Folosind eventual a) scrieți numărul $\frac{7}{23}$ sub forma: $\frac{7}{23}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, cu x, y, z numere naturale.

2) Aflați x, y, z numere naturale astfel încât: $\frac{7}{23}=\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}$. ***prof.Ion Pătraşcu, Craiova***

2. Pe o foaie de hârtie sunt desenate cu negru triunghiuri echilaterale, isoscele, dreptunghice şi dreptunghice-isoscele, iar cu roşu liniile lor importante (mediane, bisectoare, înălțimi şi mediatoare). Ştiind că sunt 27 segmente negre, 58 de linii desenate numai cu roşu şi că triunghiurile nu au laturi comune, să se afle câte triunghiuri de fiecare tip există. ***prof.Nicolae Ivăşchescu, Craiova***

3. Fie ABCD un romb în care AB=a şi $m(\angle ABC)=60^0$. Considerăm punctele M şi N pe (BC) respectiv (CD) astfel încât BM=CN=x.

a) Aflați x astfel încât perimetrul triunghiului AMN să fie minim, 0<x<a.

prof. Ion Pătraşcu, Craiova

b) Fiind dat un triunghi echilateral AMN construiți numai cu ajutorul echerului un romb ABCD astfel încât $M\in(BC)$, $N\in(CD)$ şi $m(\angle ABC)=60^0$. (Echerul se poate utiliza numai pentru a trasa drepte şi perpendiculare).

prof.Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Clasa a VIII-a

1. Un număr natural se numeşte ,,pretențios" dacă se poate scrie sub forma x^2+3y^2 cu x şi y numere întregi. Demonstrați că:

a) Numărul 1001 nu este ,,pretențios".

b) Produsul a două numere ,,pretențioase" este un număr ,,pretențios" ***prof.Ion Pătraşcu, Craiova***

2. Fie ABCD un tetraedru., M mijlocul muchiei AB, iar N mijlocul muchiei CD.

a) Construiți prin M şi N un plan paralel cu muchiile AD şi BC.

b) Dacă P şi Q sunt intersecțiile planului de la punctul a) cu (AC) şi (BC), ce fel de patrulater este MPNQ?

c) Arătați că pentru orice plan dus prin M şi N şi care intersectează pe (AC) în R şi (BD) în S avem $\frac{AR}{RC}=\frac{SB}{SD}$.

prof.Ion Pătraşcu, Craiova

3. 1) Demonstrați că dacă $a \ge -\frac{1}{1336}, b \ge -\frac{1}{1336}, c \ge \frac{1}{1336}$ şi a+b+c=3, atunci:

$\sqrt{1336a+1}+\sqrt{1336b+1}+\sqrt{1336c+1}<2007$.

2) Demonstrați că: $|x+1|+|x-7|+|y+100|+|y-400|+|z+500|+|z-1000| \ge 2008$. ***prof. Nicolae Ivăşchescu, Craiova***

Indicații şi Răspunsuri

Clasa a IV-a

1. A=1; $\{[(x-3):2005+2005]:2006+2006\}=2007$; $[(x-3):2005+2005]:2006=1 \Rightarrow [(x-3):2005+2005]=2006$

(x–3):2005=1; (x–3)=2005; x–3=2005⇔x=2008

2. $\begin{cases} a+b=2008 \\ a+b=(a-b)\cdot 334+4 \end{cases}$; 2008=(a–b)·334+4; 2004=(a–b)·334; a–b=6; a+b=2008

2a=2014; a=1007 şi b=1001.Obs. Se poate da soluția cu metoda figurativă.

3. Să calculăm 1+2+3 şi observăm că obținem 6. Deci în fiecare din cele trei cutii punem respectiv una, două şi trei bile. Să calculăm 1+2+3+4+5=15. Deci se poate. Să calculăm 1+2+3+4+5+6=21. Deci nu se poate, pentru că ar trebui să avem 21 de bile, nu 20. 1+2+…+99=4950 deci se pot pune 99 bile în 4950 cutii.

Clasa a V-a

1.Avem $(\overline{1111a})\cdot(\overline{1111a})=\overline{111a}\cdot 10^5+\overline{bcccd}$. Dar$\overline{111a}\cdot 10^5$=11100000a=1111·9990a+1110a⇒1111a·1111a–

–1111·9990a=1110a+$\overline{bcccd}$ ⇒1111a(1111a–9990)=1110a+$\overline{bcccd}$⇒1111a–9990>0⇒

1111a>9990⇒a=9⇒(9999·9999=99980001)⇒ $\overline{bcccd}$ =80001

2. 1) a=2+6+12=20; 2) 3a=6+18+36=60; 60=3·4·5; 3a=60, a=20

3) 3b=1·2·3+2·3·3+3·4·3+3·5·3=1·2·3+2·3·(4–1)+3·4·(5–2)+4·5·(6–3)=1·2·3+2·3·4–2·3·4–2·3·1+3·4·5–2·3·4+4·5·6–

–3·4·5=4·5·6; b=40, 40= $\frac{4\cdot 5}{2}$ +1+4+9+16 (A)

4) 3S=1·2·3+2·3·(4–1)+3·4(5–2)+…+98·99(100–97)+99·100(101–98)=1·2·3+2·3·4–1·2·3+3·4·5–2·3·4+…+98·99·100–

–97·98·99+99·100·101–98·99·100=99·100·101; S=33·100·101=333300

5) Observăm că $1^2+2^2+\ldots+99^2$=S–(1+2+3+…+99); S=1·(2+1)+2(2+1)+3(3+1)+…+99(99+1)=$1^2+2^2+\ldots+99^2$+(1+2+…+99)

3. a) Primul jucător trebuie să joace în aşa fel încât înainte de sfârşitul jocului să-l lase pe adversarul său să aibă în față 1+6=7 cărți pentru că oricum ar lua va câştiga primul jocul. Ca să-l facă pe adversar să ajungă la 7 cărți trebuie să ia în aşa fel încât adversarul să aibă în față mereu un multiplu de 7⇒ primul începe luând o carte pentru că 22–1=21=3·7. Dacă adversarul ia x cărți, primul trebuie să continue luând 7–x (pentru că x+7–x=7); b) Dacă se dau 8 cărți pentru că 1+8=9⇒primul va câştiga dacă-l pune pe adversar în fața unui multiplu de 9 cărți. Deci primul ca să câştige ia 4 cărți pentru că 22–4=18=9·2. Dacă al doilea ia y cărți primul joacă în continuare luând 9·y (pentru că y+9–y=9).

Clasa a VI-a

1. Numerele naturale au una din formele: 3k, 3k+1, 3k+2; pentru a=3k, k∈**N**⇒b=3k+2; c=3k+4; pentru a=3k+1, a+2 devine 3k+1+2=3k+3= 3(k+1)⇒nu este prim sau pentru 3k+2⇒k+a+4 este de forma 3k+2+4=3k+6=3(k+2)⇒nu este prim. Singurul număr prim de forma 3k este 3 deci a=3, b=5, c=7 convine.

2. Se arată că A şi B sunt numere prime între ele. Fie d=(2n+4m+6p+3, 3n+6m+9p+4)⇒ d|2n+4m+6p+3⇒d|3(2n+4m+6p+3) şi d|3n+6m+9p+4⇒d|2(3n+6m+9p+4) ⇒d|3(2n+4m+6p+3)–2(3n+6m+9p+4)⇒ ⇒d|6n+12m+18p+9–6n–12m–18p–8⇒d|1⇒d=1⇒(A, B)=1⇒[A, B]=A·B deci [A, B]=(2n+4m+6p+3)(3n+6m+9p+4)

3. La fiecare două sărituri se apropie de origine cu trei unități 2009=3·669+2. După 669·2=1338 sărituri va fi în punctul T(2), de aici sare în U(7) şi apoi în V(–1). Acest punct este o soluție a problemei. Pentru a ajunge aici sunt necesare 1338+2=1340 sărituri. O altă soluție a problemei este punctul W(1) care se obține după 1340+3=1343 sărituri. Remarcă. ,,Neobositul" nu poate ajunge în origine! b) Lungimea segmentului [AB] este 2000–998=1002 unități. Mijlocul acestui segment este M(1499). La fiecare 2 sărituri se apropie cu 3 unități. 2009–1499=510; 510=3·170. Sunt necesare 170·2=340 sărituri.

Clasa a VII-a

1. a) b>a. Există q şi r numere naturale unice astfel încât b=a·q+r, r<a

(teorema împărțirii cu rest) obținem b–r=a·q $|:q \Rightarrow \frac{b}{q}-\frac{r}{q}=a \,\Big|\cdot\frac{1}{b} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{q}-\frac{r}{b\cdot q}$

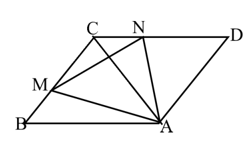
b)23=7·3+2⇒23–2=7·3⇒ $\frac{23}{3}-\frac{2}{3}=7\,\Big|\cdot\frac{1}{23} \Rightarrow \frac{7}{23}=\frac{1}{3}-\frac{2}{69}$ (1)

69=2·34+1⇒69–1=2·32⇒ $\frac{69}{34}-\frac{1}{34}=2\,\Big|\cdot\frac{1}{69}$; $\frac{2}{69}=\frac{1}{34}-\frac{1}{34\cdot 69}$ (2)

Înlocuim (2) în (1)⇒ $\frac{7}{23}=\frac{1}{3}-\frac{1}{34}+\frac{1}{2346}$. Se pot obține şi alte reprezentări ale lui $\frac{7}{23}$ de exemplu $\frac{7}{23}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{230}$

2) $\frac{7}{23}=\frac{1}{\frac{23}{7}}=\frac{1}{\frac{3\cdot 7+2}{7}}=\frac{1}{3+\frac{2}{7}}=\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{7}{2}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}$ Putem considera x=3; y=3; z=2.

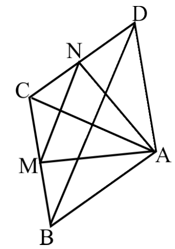
2. Fie x numărul triunghiurilor echilaterale, y numărul triunghiurilor isoscele, z numărul triunghiurilor dreptunghice isoscele şi t numărul triunghiurilor dreptunghice. Într-un triunghi echilateral sunt trasate 3 linii roşii pentru a reprezenta liniile importante într-un triunghi



isoscel sunt trasate 9 linii roşii, într-un triunghi dreptunghic isoscel 7 linii roşii, iar într-un triunghi dreptunghic 10 linii roşii.

Avem: $\begin{cases} x+y+z+t=9 \\ 3x+9y+7z+10t=58 \end{cases}$ (27:3=9 triunghiuri); x=9–y–z–t. Înlocuim în a doua ecuație obținem:6y+4z+7t=31. Observăm că t≤4 (pe de altă parte y≥1, z≥1). Nu este posibil că t=4 pentru 6y+4z≥10. Dacă t=3 atunci cu necesitate y=1; z=1. Dacă t=2 atunci 6y+4z=17. Nu este posibil să avem soluții pentru că: 6y+4z e număr par şi 17 număr impar. Dacă t=1 atunci 6y+4z=24⇔3y+2z=12. Se observă că y≤3, y=3 nu convine; y=2 conduce la z=3. Dacă y=1 nu obținem soluție. Reținem t=1, y=2, Z=3. Problema are două soluții: x=4, y=1, z=1, t=3, x=3, y=2, z=3, t=1.

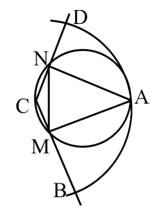
3. a) $\Delta ABM \equiv \Delta ACN$ (LUL)$\Rightarrow$AM=AN (1), $\angle BAM \equiv \angle CAN$ (2).



Din (2) şi din faptul că m($\angle$BAC)= $60^0 \Rightarrow$m($\angle$MAN)=60^0 (3). Din (1) şi (3) obținem că triunghiul AMN este echilateral. Perimetrul ΔAMN este minim ⇔AM este minimă⇔AM⊥BC⇔M este mijlocul lui (BC).

Într-adevăr dacă M nu este mijlocul lui BC vom avea $AM > \frac{a\sqrt{3}}{2}$ şi perimetrul $3AM > \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.Deci $x = \frac{a}{2}$. b) <u>Construcția.</u> Construim perpendicularele în M şi N pe AM respectiv AN şi notăm cu C intersecția lor. Unim A cu C şi construim mediatoarea lui AC. CN intersectează mediatoarea în B iar CM intersectează mediatoarea în D. Unind A cu B şi A cu D se obține rombul ABCD.

<u>Demonstrația construcției:</u> În patrulaterul AMCN având $\angle AMC \equiv \angle ANC = 90^0$ şi $\angle MAN = 60^0$ rezultă că m($\angle$MCN)=120^0. De asemenea AC va fi bisectoarea unghiului MCN (AN=AM). Punctele B şi D sunt pe mediatoarea lui AC deci BC=BA şi DC=DA. Din BC=BA şi m($\angle$BCA)=$60^0 \Rightarrow$BC=CA=AB. Din DC=DA şi m($\angle$DCA)=$60^0 \Rightarrow$DC=CA=DA. Prin urmare ABCD este romb cu m($\angle$ABC)=60^0.



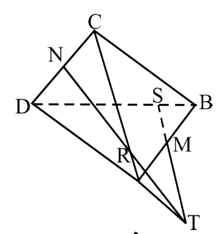
<u>Altă construcție</u>. Se consideră cercul circumscris ΔAMN şi se ia un punct C pe arcul mic $\overset{\frown}{NM}$. Pentru orice C avem AC=MC+CN. Prelungim (CN şi (CM şi intersectând aceste semidrepte cu C(C, CA) se obțin punctele B şi D.

Clasa a VIII-a

1. a) Dacă x∈**N** sunt posibile unul dintre cazurile x=3k, x=3k+1 sau 3k+2 unde k∈**N**. Prin ridicări la pătrat se obține că x^2 poate fi de forma 3p sau 3p+1 unde p∈**N**. Rezultă atunci că un număr ,,pretențios" poate fi de forma 3q sau 3q+1 cu q natural. Deoarece 1001=3·333+2 înseamnă că el nu este ,,pretențios". b) Fie $p_1=x^2+3y^2$ şi $p_2=u^2+3v^2$ două numere ,,pretențioase". Avem $p_1 \cdot p_2=(x^2+3y^2)(u^2+3v^2)=(xu-3yv)^2+3(xv+yu)^2$.

Într-adevăr $x^2u^2+3x^2v^2+3u^2y^2+9y^2v^2=x^2u^2+9y^2v^2-6xyuv+3x^2v^2+3y^2u^2+6xyuv$

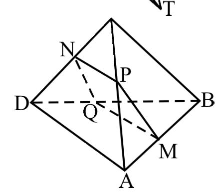
xu–3yv∈**Z**, xv+yu∈**Z** deci $p_1 \cdot p_2$ este ,,pretențios".



2. a) Planul cerut va intersecta AC în P şi atunci NP//AD, de asemenea va intersecta BD în Q şi MQ//AD. Deci trebuie construite mijloacele P şi Q.

b) PN//AD, PN=$\frac{1}{2}$ AD, de asemenea MQ//AD, MQ=$\frac{1}{2}$ AD$\Rightarrow$ MPNQ este paralelogram.

c) Dacă R=P atunci S=Q şi avem $\frac{AP}{PC}=\frac{BQ}{QD}$=1. Dacă R≠P şi {T}=NR∩AD, T∈SM (justificare). Teorema lui Menelaos aplicată în ΔCDA pentru transversalele N, R, T şi în triunghiul ABD pentru transversala T, M, L conduc la: $\frac{TA}{TD}\cdot\frac{ND}{NC}\cdot\frac{RC}{RA}=1;\frac{TA}{TD}\cdot\frac{MB}{MA}\cdot\frac{SD}{SB}=1;$



Deoarece $\frac{ND}{NC}=\frac{MB}{MA}$=1 atunci avem $\frac{RC}{RA}=\frac{SD}{SB}$.

3. 1) Avem: $\sqrt{1336a+1}=\sqrt{(1336ba+1)\cdot 1}<\frac{1336a+1+1}{2}=668a+1$

$\sqrt{1336b+1}=\sqrt{(1336bb+1)\cdot 1}<\frac{1336b+1+1}{2}=668b+1$; $\sqrt{1336c+1}=\sqrt{(1336bc+1)\cdot 1}<\frac{1336c+1+1}{2}=668c+1$

Adunându-le$\Rightarrow \sqrt{1336a+1}+\sqrt{1336b+1}+\sqrt{1336c+1}<668\cdot 3+3=$2004+3=2007. Am ținut cont de $\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}\Rightarrow\sqrt{1336a+1}+\sqrt{1336b+1}+\sqrt{1336c+1}<2007$.

2) Ținem cont de proprietățile $|x|=|-x|; |x|+|y|\ge|x+y|$. Avem: $|x+1|+|-(-x+7)|\ge|x+1-x+7|=|8|=8$.

$|y+100|+|y-400|=|y+100|+|-(-y+400)|\ge|y+100-y+400|=500$

$|z+500|+|z-1000|=|z+500|+|-(z-1000)|\ge|z+500-z+1000|=1500$

Adunate : $|x+1|+|-(-x+7)|+|y+100|+|y-400|+|z+500|+|z-1000|$ ≥8+500+1500=2008 O posibilitate de atingere a egalității este:x∈ $[-1,7]$; $y\in[-100,400]$; $z\in[-500,1000]$.