

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ  
"GHEORGHE DUMITRESCU" EDIȚIA a X-a  
CRAIOVA, 1 NOIEMBRIE 2008**

**Clasa a IV-a**

1. Aflați  $x$  din egalitatea:  $\{[(x-3):2005+2005]:2006+2006\}:2007+2007=2008$  *prof.Nicolae Ivășchescu, Craiova*
2. Suma a două numere naturale este 2008. Să se afle cele două numere știind că împărțind suma celor două numere la diferența lor obținem câtul 334 și restul 4. *prof.Nicolae Ivășchescu, Craiova*
3. Este posibil să punem 6 bile în trei cutii astfel încât în fiecare cutie să fie cel puțin o bilă și să nu existe două cutii cu același număr de bile? Dar 15 bile în 5 cutii? Dar 20 de bile în 6 cutii? Dar 4950 de bile în 99 de cutii? (în aceleași condiții) *prof.Nicolae Ivășchescu, Craiova*

**Clasa a V-a**

1. Reconstituiți înmulțirea:  $\overline{aaaa} \times \overline{aaaa} = \overline{aaabcccd}$ . *prof.Nicolae Ivășchescu, Craiova*
2. 1) Calculați:  $a=1 \cdot 2+2 \cdot 3+3 \cdot 4$ .  
2) Verificați următoarele egalități și aflați  $a$ :  $3a=1 \cdot 2 \cdot 3+2 \cdot 3 \cdot 3+3 \cdot 4 \cdot 3=1 \cdot 2 \cdot 3+2 \cdot 3 \cdot (4-1)+3 \cdot 4 \cdot (5-2)=1 \cdot 2 \cdot 3+2 \cdot 3 \cdot 4-1 \cdot 2 \cdot 3+3 \cdot 4 \cdot 5-2 \cdot 3 \cdot 4=3 \cdot 4 \cdot 5$   
3) Folosind 2) calculați:  $b=1 \cdot 2+2 \cdot 3+3 \cdot 4+4 \cdot 5$   
• Verificați că  $b=(1+2+3+4)+(1^2+2^2+3^2+4^2)$   
4) Calculați  $S=1 \cdot 2+2 \cdot 3+3 \cdot 4+\dots+98 \cdot 99+99 \cdot 100$   
5) Calculați  $1^2+2^2+3^2+\dots+99^2$ . *prof.Nicolae Ivășchescu, Craiova*
3. Doi jucători iau pe rând dintr-un pachet cu 22 de cărți de joc cel mult 6 cărți. Câștigă cel care ia ultima dată cărți.  
a) Cum trebuie să joace primul jucător astfel încât să câștige? (Câte cărți ia prima dată și-n continuare?)  
b) Cum trebuie să joace primul jucător pentru a câștiga, dacă se iau cel mult 8 cărți? *prof.Nicolae Ivășchescu, Craiova*

**Clasa a VI-a**

1. Numerele naturale prime  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , se numesc „trigemene” dacă  $b-a=c-b=2$ . Găsiți toate tripletele de numere trigemene. *prof.Nicolae Ivășchescu, Craiova*
2. Să se calculeze c.m.m.m.c. al numerelor:  $A=2n+4m+6p+3$ ,  $B=3n+6m+9p+4$ ,  $m, n, p \in \mathbf{N}$ . *prof.Nicolae Ivășchescu, Craiova*
3. Un greier „neobosit” se află pe axa numerelor întregi în punctul  $P$  de coordonată 2009 ( $P(2009)$ ). El face o săritură de cinci unități în sensul pozitiv și apoi una de opt unități în sensul negativ și continuă.  
a) Aflați numărul de sărituri necesare pentru a se afla la cea mai mică distanță față de origine.  
b) După a câta săritură va fi în mijlocul segmentului determinat de punctele  $A(998)$  și  $B(2000)$ ? *prof.Ion Pătrașcu, Craiova*

**Clasa a VII-a**

1. Fie  $\frac{a}{b}$  o fracție ireductibilă subunitară.  
1) a) Arătați că există numerele naturale  $q$  și  $r$  astfel ca:  $\frac{a}{b} = \frac{1}{q} - \frac{r}{b \cdot q}$  și  $r < a$ .  
b) Folosind eventual a) scrieți numărul  $\frac{7}{23}$  sub forma:  $\frac{7}{23} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , cu  $x, y, z$  numere naturale.  
2) Aflați  $x, y, z$  numere naturale astfel încât:  $\frac{7}{23} = \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}}$ . *prof.Ion Pătrașcu, Craiova*
2. Pe o foaie de hârtie sunt desenate cu negru triunghiuri echilaterale, isoscele, dreptunghice și dreptunghice-isoscele, iar cu roșu liniile lor importante (mediane, bisectoare, înălțimi și mediatoare). Știind că sunt 27 segmente negre, 58 de linii desenate numai cu roșu și că triunghiurile nu au laturi comune, să se afle câte triunghiuri de fiecare tip există. *prof.Nicolae Ivășchescu, Craiova*
3. Fie  $ABCD$  un romb în care  $AB=a$  și  $m(\angle ABC)=60^\circ$ . Considerăm punctele  $M$  și  $N$  pe  $(BC)$  respectiv  $(CD)$  astfel încât  $BM=CN=x$ .  
a) Aflați  $x$  astfel încât perimetrul triunghiului  $AMN$  să fie minim,  $0 < x < a$ . *prof. Ion Pătrașcu, Craiova*  
b) Fiind dat un triunghi echilateral  $AMN$  construiți numai cu ajutorul echerului un romb  $ABCD$  astfel încât  $M \in (BC)$ ,  $N \in (CD)$  și  $m(\angle ABC)=60^\circ$ . (Echerul se poate utiliza numai pentru a trasa drepte și perpendiculare). *prof.Nicolae Ivășchescu, Craiova*

**Clasa a VIII-a**

1. Un număr natural se numește „pretențios” dacă se poate scrie sub forma  $x^2+3y^2$  cu  $x$  și  $y$  numere întregi. Demonstrați că:  
a) Numărul 1001 nu este „pretențios”.  
b) Produsul a două numere „pretențioase” este un număr „pretențios” *prof.Ion Pătrașcu, Craiova*
2. Fie  $ABCD$  un tetraedru.,  $M$  mijlocul muchiei  $AB$ , iar  $N$  mijlocul muchiei  $CD$ .  
a) Construiți prin  $M$  și  $N$  un plan paralel cu muchiile  $AD$  și  $BC$ .  
b) Dacă  $P$  și  $Q$  sunt intersecțiile planului de la punctul a) cu  $(AC)$  și  $(BC)$ , ce fel de patrulater este  $MPNQ$ ?  
c) Arătați că pentru orice plan dus prin  $M$  și  $N$  și care intersectează pe  $(AC)$  în  $R$  și  $(BD)$  în  $S$  avem  $\frac{AR}{RC} = \frac{SB}{SD}$ . *prof.Ion Pătrașcu, Craiova*

3. 1) Demonstrați că dacă  $a \geq -\frac{1}{1336}$ ,  $b \geq -\frac{1}{1336}$ ,  $c \geq \frac{1}{1336}$  și  $a+b+c=3$ , atunci:

$$\sqrt{1336a+1} + \sqrt{1336b+1} + \sqrt{1336c+1} < 2007.$$

2) Demonstrați că:  $|x+1| + |x-7| + |y+100| + |y-400| + |z+500| + |z-1000| \geq 2008$ . **prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova**

### Indicații și Răspunsuri

#### Clasa a IV-a

1.  $A=1$ ;  $\{[(x-3):2005+2005]:2006+2006\}=2007$ ;  $[(x-3):2005+2005]:2006=1 \Rightarrow [(x-3):2005+2005]=2006$   
 $(x-3):2005=1$ ;  $(x-3)=2005$ ;  $x-3=2005 \Leftrightarrow x=2008$

2.  $\begin{cases} a+b=2008 \\ a+b=(a-b) \cdot 334+4 \end{cases}$ ;  $2008=(a-b) \cdot 334+4$ ;  $2004=(a-b) \cdot 334$ ;  $a-b=6$ ;  $a+b=2008$

$2a=2014$ ;  $a=1007$  și  $b=1001$ . Obs. Se poate da soluția cu metoda figurativă.

3. Să calculăm  $1+2+3$  și observăm că obținem 6. Deci în fiecare din cele trei cutii punem respectiv una, două și trei bile. Să calculăm  $1+2+3+4+5=15$ . Deci se poate. Să calculăm  $1+2+3+4+5+6=21$ . Deci nu se poate, pentru că ar trebui să avem 21 de bile, nu 20.  $1+2+\dots+99=4950$  deci se pot pune 99 bile în 4950 cutii.

#### Clasa a V-a

1. Avem  $(1111a) \cdot (1111a) = 111a \cdot 10^5 + \overline{bcccc}$ . Dar  $111a \cdot 10^5 = 1110000a = 1111 \cdot 9990a + 1110a \Rightarrow 1111a \cdot 1111a - 1111 \cdot 9990a = 1110a + \overline{bcccc} \Rightarrow 1111a(1111a - 9990) = 1110a + \overline{bcccc} \Rightarrow 1111a - 9990 > 0 \Rightarrow$

$$1111a > 9990 \Rightarrow a > 9 \Rightarrow (9999 - 9999 = 99980001) \Rightarrow \overline{bcccc} = 80001$$

2. 1)  $a=2+6+12=20$ ; 2)  $3a=6+18+36=60$ ;  $60=3 \cdot 4 \cdot 5$ ;  $3a=60$ ,  $a=20$

3)  $3b=1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot (4-1) + 3 \cdot 4 \cdot (5-2) + 4 \cdot 5 \cdot (6-3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 6 -$

$$-3 \cdot 4 \cdot 5 = 4 \cdot 5 \cdot 6; b=40, 40 = \frac{4 \cdot 5}{2} + 1 + 4 + 9 + 16 \text{ (A)}$$

4)  $3S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot (4-1) + 3 \cdot 4 \cdot (5-2) + \dots + 98 \cdot 99 \cdot (100-97) + 99 \cdot 100 \cdot (101-98) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 98 \cdot 99 \cdot 100 - 97 \cdot 98 \cdot 99 + 99 \cdot 100 \cdot 101 - 98 \cdot 99 \cdot 100 = 99 \cdot 100 \cdot 101$ ;  $S = 33 \cdot 100 \cdot 101 = 333300$

5) Observăm că  $1^2 + 2^2 + \dots + 99^2 = S - (1+2+3+\dots+99)$ ;  $S = 1 \cdot (2+1) + 2 \cdot (2+1) + 3 \cdot (3+1) + \dots + 99 \cdot (99+1) = 1^2 + 2^2 + \dots + 99^2 + (1+2+\dots+99)$

3. a) Primul jucător trebuie să joace în așa fel încât înainte de sfârșitul jocului să-l lase pe adversarul său să aibă în față  $1+6=7$  cărți pentru că oricum ar lua va câștiga primul joc. Ca să-l facă pe adversar să ajungă la 7 cărți trebuie să ia în așa fel încât adversarul să aibă în față mereu un multiplu de 7  $\Rightarrow$  primul începe luând o carte pentru că  $22-1=21=3 \cdot 7$ . Dacă adversarul ia  $x$  cărți, primul trebuie să continue luând  $7-x$  (pentru că  $x+7-x=7$ ); b) Dacă se dau 8 cărți pentru că  $1+8=9 \Rightarrow$  primul va câștiga dacă-l pune pe adversar în fața unui multiplu de 9 cărți. Deci primul ca să câștige ia 4 cărți pentru că  $22-4=18=9 \cdot 2$ . Dacă al doilea ia  $y$  cărți primul joacă în continuare luând  $9-y$  (pentru că  $y+9-y=9$ ).

#### Clasa a VI-a

1. Numerele naturale au una din formele:  $3k$ ,  $3k+1$ ,  $3k+2$ ; pentru  $a=3k$ ,  $k \in \mathbf{N} \Rightarrow b=3k+2$ ;  $c=3k+4$ ; pentru  $a=3k+1$ ,  $a+2$  devine  $3k+1+2=3k+3=3(k+1) \Rightarrow$  nu este prim sau pentru  $3k+2 \Rightarrow k+a+4$  este de forma  $3k+2+4=3k+6=3(k+2) \Rightarrow$  nu este prim. Singurul număr prim de forma  $3k$  este 3 deci  $a=3$ ,  $b=5$ ,  $c=7$  convine.

2. Se arată că  $A$  și  $B$  sunt numere prime între ele. Fie  $d = (2n+4m+6p+3, 3n+6m+9p+4) \Rightarrow d | 2n+4m+6p+3 \Rightarrow d | 3(2n+4m+6p+3)$  și  $d | 3n+6m+9p+4 \Rightarrow d | 2(3n+6m+9p+4) \Rightarrow d | 3(2n+4m+6p+3) - 2(3n+6m+9p+4) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d | 6n+12m+18p+9-6n-12m-18p-8 \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d=1 \Rightarrow (A, B)=1 \Rightarrow [A, B]=A \cdot B \text{ deci } [A, B]=(2n+4m+6p+3)(3n+6m+9p+4)$$

3. La fiecare două sărituri se apropie de origine cu trei unități  $2009=3 \cdot 669+2$ . După  $669 \cdot 2=1338$  sărituri va fi în punctul  $T(2)$ , de aici sare în  $U(7)$  și apoi în  $V(-1)$ . Acest punct este o soluție a problemei. Pentru a ajunge aici sunt necesare  $1338+2=1340$  sărituri. O altă soluție a problemei este punctul  $W(1)$  care se obține după  $1340+3=1343$  sărituri. Remarcă. „Neobositul” nu poate ajunge în origine! b) Lungimea segmentului  $[AB]$  este  $2000-998=1002$  unități. Mijlocul acestui segment este  $M(1499)$ . La fiecare 2 sărituri se apropie cu 3 unități.  $2009-1499=510$ ;  $510=3 \cdot 170$ . Sunt necesare  $170 \cdot 2=340$  sărituri.

#### Clasa a VII-a

1. a)  $b > a$ . Există  $q$  și  $r$  numere naturale unice astfel încât  $b = a \cdot q + r$ ,  $r < a$

(teorema împărțirii cu rest) obținem  $b-r = a \cdot q \mid :q \Rightarrow \frac{b-r}{q} = a \mid \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{a}{q} - \frac{r}{b \cdot q}$

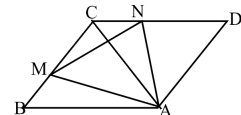
$$b) 23 = 7 \cdot 3 + 2 \Rightarrow 23 - 2 = 7 \cdot 3 \Rightarrow \frac{23}{3} - \frac{2}{3} = 7 \mid \cdot \frac{1}{23} \Rightarrow \frac{1}{23} = \frac{7}{3} - \frac{2}{69} \text{ (1)}$$

$$69 = 2 \cdot 34 + 1 \Rightarrow 69 - 1 = 2 \cdot 34 \Rightarrow \frac{69}{34} - \frac{1}{34} = 2 \mid \cdot \frac{1}{69} \Rightarrow \frac{1}{69} = \frac{2}{34} - \frac{1}{34 \cdot 69} \text{ (2)}$$

Înlocuim (2) în (1)  $\Rightarrow \frac{1}{23} = \frac{7}{3} - \frac{1}{34} + \frac{1}{2346}$ . Se pot obține și alte reprezentări ale lui  $\frac{1}{23}$  de exemplu  $\frac{1}{23} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{230}$

$$2) \frac{1}{23} = \frac{1}{23} = \frac{1}{3 \cdot 7 + 2} = \frac{1}{3 + \frac{2}{7}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} \text{ Putem considera } x=3; y=3; z=2.$$

2. Fie  $x$  numărul triunghiurilor echilaterale,  $y$  numărul triunghiurilor isoscele,  $z$  numărul triunghiurilor dreptunghice isoscele și  $t$  numărul triunghiurilor dreptunghice. Într-un triunghi echilateral sunt trasate 3 linii roșii pentru a reprezenta liniile importante într-un triunghi



isoscel sunt trasate 9 linii roșii, într-un triunghi dreptunghic isoscel 7 linii roșii, iar într-un triunghi dreptunghic 10 linii roșii.

Avem:  $\begin{cases} x + y + z + t = 9 \\ 3x + 9y + 7z + 10t = 58 \end{cases}$  (27:3=9 triunghiuri);  $x=9-y-z-t$ . Înlocuim în a doua ecuație obținem:  $6y+4z+7t=31$ .

Observăm că  $t \leq 4$  (pe de altă parte  $y \geq 1, z \geq 1$ ). Nu este posibil că  $t=4$  pentru  $6y+4z \geq 10$ . Dacă  $t=3$  atunci cu necesitate  $y=1; z=1$ . Dacă  $t=2$  atunci  $6y+4z=17$ . Nu este posibil să avem soluții pentru că:  $6y+4z$  e număr par și 17 număr impar. Dacă  $t=1$  atunci  $6y+4z=24 \Leftrightarrow 3y+2z=12$ . Se observă că  $y \leq 3, y=3$  nu convine;  $y=2$  conduce la  $z=3$ . Dacă  $y=1$  nu obținem soluție. Reținem  $t=1, y=2, z=3$ . Problema are două soluții:  $x=4, y=1, z=1, t=3, x=3, y=2, z=3, t=1$ .

3. a)  $\triangle ABM \cong \triangle ACN$  (LUL)  $\Rightarrow AM=AN$  (1),  $\angle BAM \cong \angle CAN$  (2).

Din (2) și din faptul că  $m(\angle BAC) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle MAN) = 60^\circ$  (3). Din (1) și (3) obținem că triunghiul AMN este echilateral. Perimetrul  $\triangle AMN$  este minim  $\Leftrightarrow AM$  este minimă  $\Leftrightarrow AM \perp BC \Leftrightarrow M$  este mijlocul lui (BC).

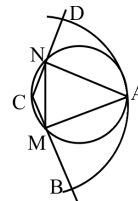
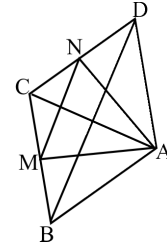
Într-adevăr dacă M nu este mijlocul lui BC vom avea  $AM > \frac{a\sqrt{3}}{2}$  și perimetrul

$$3AM > \frac{3a\sqrt{3}}{2}. \text{ Deci } x = \frac{a}{2}.$$

b) **Construcția.** Construim perpendicularele în M și N pe AM respectiv AN și notăm cu C intersecția lor. Unim A cu C și construim mediatoarea lui AC. CN intersecțează mediatoarea în B iar CM intersecțează mediatoarea în D. Unind A cu B și A cu D se obține rombul ABCD.

**Demonstrația construcției:** În patrulaterul AMCN având  $\angle AMC \cong \angle ANC = 90^\circ$  și  $\angle MAN = 60^\circ$  rezultă că  $m(\angle MCN) = 120^\circ$ . De asemenea AC va fi bisectoarea unghiului MCN ( $AN=AM$ ). Punctele B și D sunt pe mediatoarea lui AC deci  $BC=BA$  și  $DC=DA$ . Din  $BC=BA$  și  $m(\angle BCA) = 60^\circ \Rightarrow BC=CA=AB$ . Din  $DC=DA$  și  $m(\angle DCA) = 60^\circ \Rightarrow DC=CA=DA$ . Prin urmare ABCD este romb cu  $m(\angle ABC) = 60^\circ$ .

**Altă construcție.** Se consideră cercul circumscris  $\triangle AMN$  și se ia un punct oarecare C pe arcul mic  $\widehat{MN}$ . Pentru orice C avem  $AC=MC+CN$ . Prelungim (CN și (CM și intersectând aceste semidrepte cu (C, CA) se obțin punctele B și D.



### Clasa a VIII-a

1. a) Dacă  $x \in \mathbf{N}$  sunt posibile unul dintre cazurile  $x=3k, x=3k+1$  sau  $3k+2$  unde  $k \in \mathbf{N}$ . Prin ridicări la pătrat se obține că  $x^2$  poate fi de forma  $3p$  sau  $3q+1$  unde  $p \in \mathbf{N}$ . Rezultă atunci că un număr „pretențios” poate fi de forma  $3q$  sau  $3q+1$  cu  $q$  natural. Deoarece  $1001=3 \cdot 333+2$  înseamnă că el nu este „pretențios”. b) Fie  $p_1=x^2+3y^2$  și  $p_2=u^2+3v^2$  două numere „pretențioase”. Avem  $p_1 \cdot p_2 = (x^2+3y^2)(u^2+3v^2) = (xu-3yv)^2 + 3(xv+yu)^2$ . Într-adevăr  $x^2u^2+3x^2v^2+3u^2y^2+9y^2v^2 = x^2u^2+9y^2v^2-6xyuv+3x^2v^2+3y^2u^2+6xyuv$

$xu-3yv \in \mathbf{Z}, xv+yu \in \mathbf{Z}$  deci  $p_1 \cdot p_2$  este „pretențios”.

2. a) Planul cerut va intersecta AC în P și atunci  $NP \parallel AD$ , de asemenea va intersecta BD în Q și  $MQ \parallel AD$ . Deci trebuie construite mijloacele P și Q.

b)  $PN \parallel AD, PN = \frac{1}{2} AD$ , de asemenea  $MQ \parallel AD, MQ = \frac{1}{2} AD \Rightarrow MPNQ$  este paralelogram.

c) Dacă  $R=P$  atunci  $S=Q$  și avem  $\frac{AP}{PC} = \frac{BQ}{QD} = 1$ . Dacă  $R \neq P$  și  $\{T\} = NR \cap AD, T \in SM$

(justificare). Teorema lui Menelaos aplicată în  $\triangle CDA$  pentru transversalele N, R, T și în triunghiul ABD pentru transversala T, M, L conduc la:  $\frac{TA}{TD} \cdot \frac{ND}{NC} \cdot \frac{RC}{RA} = 1; \frac{TA}{TD} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{SD}{SB} = 1;$

Deoarece  $\frac{ND}{NC} = \frac{MB}{MA} = 1$  atunci avem  $\frac{RC}{RA} = \frac{SD}{SB}$ .

3. 1) Avem:  $\sqrt{1336a+1} = \sqrt{(1336ba+1) \cdot 1} < \frac{1336a+1+1}{2} = 668a+1$

$$\sqrt{1336b+1} = \sqrt{(1336bb+1) \cdot 1} < \frac{1336b+1+1}{2} = 668b+1; \sqrt{1336c+1} = \sqrt{(1336bc+1) \cdot 1} < \frac{1336c+1+1}{2} = 668c+1$$

Adunându-le  $\Rightarrow \sqrt{1336a+1} + \sqrt{1336b+1} + \sqrt{1336c+1} < 668 \cdot 3 + 3 = 2004+3=2007$ . Am ținut cont de

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \sqrt{1336a+1} + \sqrt{1336b+1} + \sqrt{1336c+1} < 2007.$$

2) Ținem cont de proprietățile  $|x| = |-x|; |x|+|y| \geq |x+y|$ . Avem:  $|x+1| + |-(x+7)| \geq |x+1-x-7| = |8| = 8$ .

$$|y+100| + |y-400| = |y+100| + |-(y+400)| \geq |y+100-y-400| = 500$$

$$|z+500| + |z-1000| = |z+500| + |-(z-1000)| \geq |z+500-z+1000| = 1500$$

Adunate :  $|x+1| + |-(x+7)| + |y+100| + |y-400| + |z+500| + |z-1000| \geq 8+500+1500=2008$  O posibilitate de atingere a egalității este:  $x \in [-1, 7]; y \in [-100, 400]; z \in [-500, 1000]$ .

