

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a VII-a
Craiova, 19 noiembrie 2005

Clasa a XII-a

1. Să se determine funcțiile $f, g : (0, \infty) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}^*$ care admit primitivele F și G cu proprietățile :

$$G(x) = -x \cdot \ln x \cdot f(x)$$

$$F(x) = -x \cdot \ln x \cdot g(x)$$

pentru orice $x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.

Radu Miculescu (G.M. 4/ 2005)

2. Se consideră funcțiile $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ($n \in \mathbf{N}$) date prin:

i) $f_0(x) = 1, (\forall) x \in \mathbf{R}$;

ii) $f_n(0) = 1, (\forall) n \geq 1$;

iii) $f'_{n+1}(x) = f_n(x), (\forall) x \in \mathbf{R}$;

Arătați că:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^x, (\forall) x \in \mathbf{R}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (e^x - f_k(x)) = xe^x, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

Prof. Mihai Dicu, Craiova

3. Fie (M, \cdot) un monoid având elementul neutru e și $a, b \in M$ astfel încât $ab = e$ și $ba \neq e$. Arătați că dacă $m, n, p, q \in \mathbf{N}$ au proprietatea : $b^n a^m = b^q a^p$ atunci $m = p$ și $n = q$.

(Selecție realizată de prof. Mihai Dicu)

Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la 10.

Un punct se acordă din oficiu.

Timp de lucru: 2 ore.