

Soluții XII

1. Adunăm relațiile

$$G(x) = -x \cdot \ln x \cdot f(x)$$

$$F(x) = -x \cdot \ln x \cdot g(x)$$

Și găsim $G(x) + F(x) = -x \ln x (f(x) + g(x))$ sau $\frac{f(x) + g(x)}{F(x) + G(x)} = -\frac{1}{x \ln x}$ de unde rezultă

căln $| G(x) + F(x) | = -\ln |\ln x| + C$ sau $| G(x) + F(x) | = \frac{k}{|\ln x|}$ adică

$$G(x) + F(x) = \pm \frac{k}{|\ln x|} \text{ și în consecință } G(x) + F(x) = \pm \frac{k}{\ln x} \quad (1)$$

(pt. că sunt derivabile)

Dacă înmulțim aceleași relații membru cu membru atunci obținem $G(x)g(x) - F(x)f(x) = 0$ sau $[G^2(x) - F^2(x)]' = 0$, de unde $[G(x) + F(x)] [G(x) - F(x)] = a$ și apoi

$G(x) - F(x) = \pm k \cdot \ln x$ (2). Adunând și scăzând (1) și (2) găsim G și F și apoi, prin derivare, rezultă f și g .

2. Integrând găsim că $f_n(x) = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^n/n!$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

Dezvoltând e^x în serie de puteri avem $e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$.

De aici rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^x$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)! [e - f_n(x)] = 0$ (*)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (e^x - f_k(x)) &= \\ &= e^x - 1 + e^x - 1 - x/1! + e^x - 1 - x/1! - x^2/2! + \dots + e^x - 1 - x/1! - x^2/2! - \dots - x^n/n! = \\ &= (n+1)e^x - (n+1) - nx/1! - (n-1)x^2/2! - (n-2)x^3/3! - \dots - 2x^{n-1}/(n-1)! - x^n/n! = \\ &= (n+1)[e - f_n(x)] + x(1+x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^{n-1}/(n-1)!) = \\ &= (n+1)[e - f_n(x)] + x f_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Din (*) rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)[e - f_n(x)] = 0$ și în consecință $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n (e^x - f_k(x)) = x e^x$.

3. Din $ab = e$, prin inducție, găsim că $a^k b^k = e$, $k > 0$. Să presupunem că $n > q$. Înmulțind ambii membri ai relației cu a^q la stânga și cu b^p la dreapta avem că

$a^q b^n a^m b^p = e$ și apoi $b^{n-q} a^m b^p = e$. Dacă $n - p = 1$ atunci notăm $c = a^m b^p$ iar dacă $n - p > 1$ atunci notăm $c = b^{n-q-1} a^m b^p$. Obținem $bc = e$. Dar $ab = e \Rightarrow a(bc) = e \cdot c \Rightarrow a \cdot e = e \Rightarrow a = c \Rightarrow ba = e$, fals! Analog se arată că nu este posibil ca $n < q$. În consecință, relația dată devine $b^n a^m = b^n a^p$.

Dacă presupunem că $m > p$ atunci înmulțind ambii membri ai acestei ultime relații cu a^n obținem că $a^n b^n a^m = a^n b^n a^p \Rightarrow a^m = a^p \Rightarrow a^m b^p = a^p b^p \Rightarrow a^m b^p = e \Rightarrow a^{m-p} a^p b^p = e \Rightarrow a^{m-p} = e$. La fel ca mai sus avem $m - p = 1$ sau $m - p > 1$. În primul caz $a = e \Rightarrow b = e \Rightarrow ba = e$, fals!. În al doilea caz notând $d = a^{m-p-1}$ obținem $ca = e \Rightarrow cab = b \Rightarrow c = b \Rightarrow ba = e$, fals!. În același mod eliminăm situația $p > m$ și rămâne $m = p$.