Soluții XII

1.Adunăm relațiile

$$G(x) = - x. \ln x \,.\, f(x)$$
$$F(x) = - x. \ln x \,.\, g(x)$$

Şi găsim $G(x) + F(x) = - x \ln x\,(\, f(x) + g(x)\,)$ sau $\frac{f(x)+g(x)}{F(x)+G(x)} = -\frac{1}{x\ln x}$ de unde rezultă

căln $|\, G(x) + F(x)\,| = - \ln |\ln x| + C$ sau $|\, G(x) + F(x)\,| = \frac{k}{|\ln x|}$ adică

$G(x) + F(x) = \pm \frac{k}{|\ln x|}$ şi în consecință $G(x) + F(x) = \pm \frac{k}{\ln x}$ (1)

(pt. că sunt derivabile)

Dacă înmulțim aceleaşi relații membru cu membru atunci obținem $G(x)\,g(x) - F(x)\,f(x) = 0$ sau $[\, G^2(x) - F^2(x)\,]' = 0$, de unde $[\, G(x) + F(x)\,]\,[G(x) - F(x)\,] = a$ şi apoi $G(x) - F(x) = \pm k' . \ln x$ (2). Adunând şi scăzând (1) şi (2) găsim G şi F şi apoi, prin derivare, rezultă f şi g.

2. Integrând găsim că $f_n(x) = 1+x/1! + x^2/2! +x^3/3! + \cdots + x^n/n!$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

Dezvoltând e^x în serie de puteri avem $e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$.

De aici rezultă $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=e^x$ şi $\lim_{n\to\infty} (n+1)![e - f_n(x)]=0$ (*)

$$\sum_{k=0}^{n} (\, e^x - f_k(x)\,) =$$

$$= e^x-1+e^x-1- x/1!+e^x -1- x/1! -x^2/2! +...+ e^x - 1- x/1! - x^2/2! - ...- x^n/n! =$$

$$= (n+1)e^x - (n+1) - nx/1! -(n-1)x^2/2!-(n-2)x^3/3!- ... -2x^{n-1}/(n-1)!-x^n/n! =$$

$$= (n +1)[e -f_n(x)] + x(1+x/1! + x^2/2! + x^3/3!+ ... + x^{n-1}/(n-1)!\,) =$$

$$= (n+1)[\, e - f_n(x)\,] +xf_{n-1}(x)\,.$$

Din (*) rezultă că $\lim_{n\to\infty} (n+1)[\, e - f_n(x)\,] =0$ şi în consecință $\lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} (\, e^x - f_k(x)\,) = x\, e^x$.

3. Din ab = e, prin inducție, găsim că $a^k b^k = e$, $k > 0$. Să presupunem că $n > q$. Înmulțind ambii membri ai relației cu a^q la stânga şi cu b^p la dreapta avem că $a^q b^n a^m b^p = e$ şi apoi $b^{n-q} a^m b^p = e$. Dacă $n - p = 1$ atunci notăm $c = a^m b^p$ iar dacă $n-p >1$ atunci notăm $c = b^{n-q-1}a^m b^p$. Obținem $bc = e$. Dar $ab = e \Rightarrow a(bc) = e.c \Rightarrow a.e = e \Rightarrow a = c \Rightarrow ba = e$, fals! Analog se arată că nu este posibil ca $n < q$. În cosecință, relația dată devine $b^n a^m = b^n a^p$.

Dacă presupunem că $m > p$ atunci înmulțind ambii membri ai acestei ultime relații cu a^n obținem că $a^n b^n a^m = a^n b^n a^p \Rightarrow a^m = a^p \Rightarrow a^m b^p = a^p b^p \Rightarrow a^m b^p = e \Rightarrow a^{m-p} a^p b^p = e \Rightarrow a^{m-p} = e$. La fel ca mai sus avem $m - p = 1$ sau $m - p >1$. În primul caz $a = e \Rightarrow b = e \Rightarrow ba = e$, fals!. În al doilea caz notând $d = a^{m-p-1}$obținem $ca = e \Rightarrow cab = b \Rightarrow c = b \Rightarrow ba = e$,fals!. În acelaşi mod eliminăm situația $p > m$ şi rămâne $m= p$.