Soluţii

1. Observăm că $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ şi $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Apoi logaritmând este suficient să calculăm $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{\ln n}{n}$. Folosim Stolz-Cesaro: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}.\ln(n+1) - x_n.\ln n}{n+1-n} =$ $\lim_{n\to\infty}(x_n + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}).\ln(n+1) - x_n \cdot \ln n = \lim_{n\to\infty}[(\ln(n+1) - \ln n).x_n + \frac{\ln(n+1)}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}] =$

$\lim_{n\to\infty}[\frac{x_n}{n} + \frac{\ln(n+1)}{n+1}(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln n + \ln n)] = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} + 0.c + \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1).\ln n}{n+1} = 0$. Deci $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{\ln n}{n} = 0$ şi în final limita cerută este egală cu 1.

2. Notând $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$, vom arăta că $S_n > n$ folosind metoda inducţiei matematice: $S_1 = 2005 > 1$ şi presupunem că $S_k > k$. Cum $S_{k+1} - (k+1) = S_k + x_{k+1} - (k+1) =$ $= (S_k - k)(S_k - 1)/S_k > 0$ rezultă că $S_n > n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. De aici este clar că $0 < x_{n+1} = n/S_n < 1$, $n > 0$, adică şirul este mărginit. Acum vom arăta că $(x_n)_{n>1}$ este strict crescător:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}) - (n-1)(x_1 + x_2 + ... + x_n)}{(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})(x_1 + x_2 + ... + x_n)} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} - (n-1)x_n}{S_{n-1}S_n} = \frac{n-1}{S_{n-1}S_n}(\frac{S_{n-1}}{n-1} - x_n) =$$

$$= \frac{n-1}{S_{n-1}S_n}(\frac{1}{x_n} - x_n) = \frac{n-1}{S_{n-1}S_n}.\frac{1-x_n^2}{x_n} > 0,\ n>1.$$

Deci şirul este convergent cu limita l. Aplicând lema lui Stolz-Cesaro se obţine că $l = 1$.

3. Înmulţind egalitatea $AB = aA^k + bB^l$ la stânga cu B găsim $BAB = aBA^k + bB^{l+1}$, de unde rezultă că $B^{l+1} = O_2$ şi apoi $\det(B) = 0$. Aplicând formula Cayley-Hamilton găsim că $B^2 = qB$, $q \in \mathbf{C}^*$. Înmulţind la dreapta cu A se obţine $A^{k+1} = O_2$ şi apoi $A^2 = pA$. Prin inducţie matematică avem $A^k = p^{k-1}A$ şi $B^l = q^{l-1}B$. Cu acestea $AB = ap^{k-1}A + bq^{l-1}B$. Aici prin înmulţiri la stânga şi la dreapta obţinem $p^{k-1}A = O_2$ şi $q^{l-1}B = O_2$. Rezultă că $p = 0$ sau $A = O_2$, ca şi $q = 0$ sau $B = O_2$. Luând în discuţie toate cazurile obţinem $AB = O_2$ şi aplicând binomul lui Newton avem $(\alpha A + \beta B)^n = O_2$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\}$.