

Soluții X

1. Din relația dată găsim $x_{n+1} = (b + x_n)^{1/k}$. Prin inducție se demonstrează că $a - 1 < x_n < a$. Rezultă $[x_n] = a - 1$.

2. Pentru $n = 1$ $A = C = 1 < B = 2^{1/2}$.
 Pentru $n = 2$ $A = 4^{1/2}$, $B = 3^{2/3}$, $C = 2^{3/4}$ și avem $C < A < B$.
 Pentru $n = 3$ $A = 5^{2/3}$, $B = 4^{3/4}$, $C = 3^{4/5}$ și acum $C < B < A$.

Pentru $n \geq 3$, folosind inegalitatea lui Bernoulli, vom demonstra că $C < B < A$.

Ca să arătăm că $C < B$ adică $n^{\frac{n+1}{n+2}} < (n+1)^{\frac{n}{n+1}}$, aducând fracțiile de la exponenți la același

numitor, este suficient să demonstrăm că $n^{(n+1)^2} < (n+1)^{n(n+2)}$ sau $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(n+2)} > n$, ceea ce

rezultă aplicând Bernoulli: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(n+2)} > 1 + n(n+2)\frac{1}{n} = n+3 > n$. Pentru a arăta că

$(n+1)^{\frac{n}{n+1}} < (n+2)^{\frac{n-1}{n}}$, la fel, aducând fracțiile de la exponenți la același numitor, rămâne de

demonstrat că $(n+1)^{n^2} < (n+2)^{n^2-1}$ sau $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2} > n+2$ adică $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2} - 1 > n+1$. Descom-

punând în factori avem: $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2} - 1 > \frac{1}{n+1} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2-1} + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2-2} + \dots + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + 1 \right]$

$> \frac{1}{n+1} \left[\left(1 + \frac{n^2-1}{n+1}\right) + \left(1 + \frac{n^2-2}{n+1}\right) + \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + 1 \right] = \frac{1}{n+1} [n^2 +$

$\frac{1}{2} (n^2-1)n^2] = \frac{1}{n+1} [n^2 + \frac{n^3 - n^2}{2}] = \frac{1}{2(n+1)} (n^3 + n^2)$. Dar pentru $n > 2$ se verifică ușor

că $\frac{1}{2(n+1)} (n^3 + n^2) > n+1$ și demonstrația este încheiată.

3. "⇒" Dacă $z \in \mathbf{R}$ satisface egalitatea dată, trecând la conjugat, obținem

$$\overline{a_0} (z + \overline{a_1})(z + \overline{a_2}) \dots (z + \overline{a_n}) = - (z + a_1)(z + a_2) \dots (z + a_n).$$

Înmulțind-o pe aceasta cu cea din enunț scrisă sub forma:

$$a_0 (z + a_1)(z + a_2) \dots (z + a_n) = - (z + \overline{a_1})(z + \overline{a_2}) \dots (z + \overline{a_n}) \quad (*)$$

după simplificare se obține $\overline{a_0} a_0 = 1$ adică $|a_0| = 1$. (Condiția din enunț ca toate părțile imaginare ale numerelor a_1, \dots, a_n să aibă același semn ne permite simplificarea!)

„⇐” Fie $|a_0| = 1$ și $a_k = u_k + iv_k$. Presupunând că există un număr $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, $z = x + iy$ care verifică relația dată, trecând la modul în ambii membri ai egalității (*), se găsește $[(x + u_1)^2 + (y + v_1)^2] \dots [(x + u_n)^2 + (y + v_n)^2] = [(x + u_1)^2 + (y - v_1)^2] \dots [(x + u_n)^2 + (y - v_n)^2]$. Am obținut o egalitate de forma

$$(m_1 + n_1)(m_2 + n_2) \dots (m_n + n_n) = (m_1 - n_1)(m_2 - n_2) \dots (m_n - n_n),$$

unde numerele m_k sunt strict pozitive, iar numerele nenule n_k au toate același semn. Evident că aceasta este falsă!