Soluții X

1. Din relația dată găsim $x_{n+1} = (\ b + x_n\,)^{1/k}$. Prin inducție se demonstrează că $a - 1 < x_n < a$. Rezultă $[x_n\,] = a - 1$.

2. Pentru n = 1 A = C = 1 < B = $2^{1/2}$.

Pentru n = 2 A = $4^{1/2}$, B = $3^{2/3}$, C = $2^{3/4}$ şi avem C < A < B.
Pentru n = 3 A = $5^{2/3}$, B = $4^{3/4}$, C = $3^{4/5}$ şi acum C < B < A.
Pentru n $\geq$ 3, folosind inegalitatea lui Bernoulli, vom demonstra că C < B < A.

Ca să arătăm că C < B adică $n^{\frac{n+1}{n+2}} < (n+1)^{\frac{n}{n+1}}$, aducând fracțiile de la exponenți la acelaşi numitor, este suficient să demonstrăm că $n^{(n+1)^2} < (n+1)^{n(n+2)}$ sau $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(n+2)} > n$, ceea ce rezultă aplicând Bernoulli: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(n+2)} > 1 + n(\ n + 2)\frac{1}{n} = n + 3 > n$. Pentru a arăta că $(n+1)^{\frac{n}{n+1}} < (n+2)^{\frac{n-1}{n}}$, la fel, aducând fracțiile de la exponenți la acelaşi numitor, rămâne de demonstrat că $(n+1)^{n^2} < (n+2)^{n^2-1}$ sau $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2} > n+2$ adică $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2} - 1 > n + 1$. Descompunând în factori avem: $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2} - 1 > \frac{1}{n+1}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2-1} + \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2-2} + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + 1\right] > \frac{1}{n+1}\left[\left(1 + \frac{n^2-1}{n+1}\right) + \left(1 + \frac{n^2-2}{n+1}\right) + \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + 1\right] = \frac{1}{n+1}\left[n^2 + \frac{1}{n+1}\frac{(n^2-1)\,n^2}{2}\right] = \frac{1}{n+1}\left[n^2 + \frac{n^3-n^2}{2}\right] = \frac{1}{2(n+1)}(\ n^3 + n^2)$. Dar pentru n>2 se verifică uşor că $\frac{1}{2(n+1)}(\ n^3 + n^2) > n + 1$ şi demonstrația este încheiată.

3. "$\Rightarrow$" Dacă $z \in \mathbf{R}$ satisface egalitatea dată, trecând la conjugat, obținem

$$\overline{a_0}\,(\,z + \overline{a_1}\,)(\,z + \overline{a_2}\,)\ldots(\,z + \overline{a_n}\,) = -\,(\,z + a_1\,)(\,z + a_2\,)\ldots(\,z + a_n\,)\ .$$

Înmulțind-o pe aceasta cu cea din enunț scrisă sub forma:

$$a_0\,(\,z + a_1\,)(\,z + a_2\,)\ldots(\,z + a_n\,) = -\,(\,z + \overline{a_1}\,)(\,z + \overline{a_2}\,)\ldots(\,z + \overline{a_n}\,) \quad (*)$$

după simplificare se obține $a_0\overline{a_0} = 1$ adică $|\,a_0\,| = 1$.(Condiția din enunț ca toate părțile imaginare ale numerelor $a_1, \ldots, a_n$ să aibă acelaşi semn ne permite simplificarea!)

„$\Leftarrow$ „ Fie $|\,a_0\,| = 1$ şi $a_k = u_k + iv_k$. Presupunând că există un număr $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, $z = x + iy$ care verifică relația dată, trecând la modul în ambii membrii ai egalității (*), se găseşte $[(\,x + u_1\,)^2 + (\,y + v_1)^2]\ldots[(\,x + u_n\,)^2 + (\,y + v_n)^2] = [(\,x + u_1\,)^2 + (\,y - v_1)^2]\ldots[(\,x + u_n\,)^2 + (\,y - v_n)^2]$.
Am obținut o egalitate de forma

$$(\,m_1 + n_1\,)(\,m_2 + n_2\,)\ldots(\,m_n + n_n\,) = (\,m_1 - n_1\,)(\,m_2 - n_2\,)\ldots(\,m_n - n_n\,),$$

unde numerele m_k sunt strict pozitive, iar numerele nenule n_k au toate acelaşi semn. Evident că aceasta este falsă!.