COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEŞTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a VII-a

Craiova, 19 noiembrie 2005

Clasa a IX-a

1. Fie m, n două numere naturale nenule. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x^m = [y] + m \\ y^n = [x] + n \end{cases}$$

unde $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ şi $[\ ]$ este partea întreagă.

a) Rezolvați sistemul în cazul $m = n = 2$.

b) Dacă (a, b) este o soluție a sistemului atunci arătați că este adevărată propoziția

$$P : \text{„}(a \le 3) \vee (b \le 3)\text{”}$$

(Enunț prelucrat)

Prof. Marius Ghergu, (G.M. 5-6/2004)

2. a) Fie n şi k numere naturale nenule, $n > 1$. Să se determine numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n$ ştiind că:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = n \text{ şi } x_1^{2^k} + x_2^{2^k} + ... + x_n^{2^k} \le n.$$

Prof. Cătălin Cristea, Craiova
Prof. Mihai Dicu, Craiova

b) Fie n un număr natural cel puțin egal cu 2 şi mulțimea

$$A_n = \{ x \in \mathbf{R} \mid (\exists)\ k_1, k_2, ..., k_{2n-1} \in \mathbf{N} \text{ astfel încât } x^n = n^{k_1} + n^{k_2} + ... + n^{k_{2n-1}} \}.$$

Să se arate că mulțimea $\mathbf{N} \cap A_n$ este infinită.

Prof. Mihai Dicu, Craiova

3. Fie numerele reale x, y, z cu proprietatea $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Să se arate că

$$| x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz | \le 1$$

În care cazuri are loc egalitatea?

Prof. Liviu Smarandache, Craiova

(Selecție realizată de prof. Mihai Dicu)

Notă: ***Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la10.***
Un punct se acordă din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.