Soluții

1. a) Fie $x \leq y$. Atunci $[x] \leq [y]$ şi $y^2 = [x] + 2 \leq [y] + 2 \leq y + 2$, de unde $y \in [-1, 2]$.

I. Dacă $y \in [-1, 0)$ atunci $[y] = -1$ si ecuația devine $x^2 = 1$. Convine $x = y = -1$.

II. Dacă $y \in [0, 1)$ atunci $[y] = 0$ şi avem $x^2 = 2$. Convine $x = -\sqrt{2}$, $y = 0$.

III. Dacă $y \in [1, 2)$ atunci $[y] = 1$ şi apoi $x^2 = 3$. Convine $x = y = \sqrt{3}$.

IV. Dacă $y = 2$ atunci $x = 2$.

Soluțiile sistemului sunt: $(-1, -1)$, $(0, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(2, 2)$.

b)Pentru $m = n = 1$ sistemul nu are soluție.Putem considera că $n \leq m$ şi atunci $m > 1$. Prin inducție matematică se poate demonstra că în acest caz $3^{m-1} \geq m + 1$. Presupunând că propoziția dată este falsă atunci rezultă că $a > 3$ şi $b > 3$. Adunând cele două ecuații obținem $m + n = a^m - [a] + b^n - [b] \geq [a]^m - [a] + [b]^n - [b] = [a]([a]^{m-1} - 1) + [b]([b]^{n-1} - 1) \geq 3(3^{m-1} - 1) + [b]([b]^{n-1} - 1) \geq 3(m + 1 - 1) + [b]([b]^{n-1} - 1) \geq 3m$, fals.

2. a)Aplicând inegalitatea S-C-B numerelor 1, 1, ...,1 şi $x_1^{2^{k-1}}$, $x_2^{2^{k-1}}$, ..., $x_n^{2^{k-1}}$ găsim

$x_1^{2^{k-1}} + x_2^{2^{k-1}} + ... + x_n^{2^{k-1}} \leq n$. Procedând asemănător ajungem la $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq n$.

Tinând cont de enunț avem $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + ... + (x_n - 1)^2 \leq 0$ de unde $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$

b) Pentru $n > 1$ este adevărată egalitatea:

$$n^n = (n^{n-1} + n^{n-1} + ... + n^{n-1}) + (n^{n-2} + n^{n-2} + ... + n^{n-2})$$

prima paranteză conținând n -1 termeni, iar a doua n termeni. Înmulțind-o cu n^{kn-n}, k număr natural nenul, obținem

$$(n^k)^n = (n^{kn-1} + n^{kn-1} + ... + n^{kn-1}) + (n^{kn-2} + n^{kn-2} + ... + n^{kn-2})$$

ceea ce arată că toate numerele de forma $x = n^k$ unde $k \in \mathbf{N}^*$ verifică relația din enunț, adică mulțimea respectivă este infinită.

3. Mai întâi să notăm: $S = x + y + z$ şi $P = xy + yz + zx$ şi ținând cont de relația din enunț găsim $P = (S^2 - 1)/2$. Apoi :

$|x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz| = |(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)| = |S(1 - P)| = |(3S - S^3)/2|$

Trebuie să mai demonstrăm că $|(3S - S^3)/2| \leq 1$ (*) adică $-1 \leq (3S - S^3)/2 \leq 1$. Această dublă inegalitate este echivalentă cu $(S + 1)^2(S - 2) \leq 0$ şi respectiv $(S - 1)^2(S + 2) \geq 0$. Cum din $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3$ avem $|x + y + z| \leq \sqrt{3}$, adică $-\sqrt{3} \leq S \leq \sqrt{3}$, rezultă că inegalitatea (*) este justificată şi, astfel, inegalitatea dată este demonstrată. Egalitatea are loc atunci când avem şi $x + y + z = 1$