COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEȘTI"
CRAIOVA

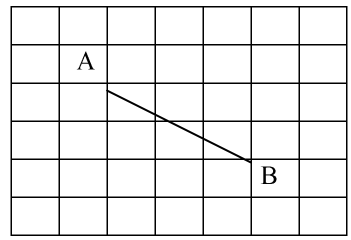
CONCURSUL DE MATEMATICĂ
GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a VI-a

Craiova, 30 octombrie 2004

Clasa a VII-a

1. a)Pe o foaie de caiet de matematică (cu pătrățele) avem desenat segmentul AB (ca în figura alăturată) Folosind o riglă negradată,construiți mediatoarea segmentului AB. Justificați.



Prof. *Nicolae Ivășchescu*, Craiova

b) Fie dreptunghiul ABCD cu AB = 2BC. Pe latura BC Construim în exteriorul dreptunghiului triunghiul dreptunghic isoscel CBE cu BC = BE. Calculați măsura unghiului format de AC cu DE.

Prof. *Nicolae Tălău*, Craiova

1. a) Demonstrați că nu există $a,b \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât:

$$3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^n = a^2 + b^2$$

Prof. *Nicolae Ivășchescu*, Craiova

b)Să se afle numărul de perechi de numere naturale m, n prime între ele care satisfac

condiția : $\frac{13m-12n}{m+n} \in \mathbf{N}^*$.

Prof. *Felician Preda*, Craiova
Prof. *C-tin Preda*,Afumați,Dolj

Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la10.
Un punct se acordă din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEŞTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a VI-a

Craiova, 30 octombrie 2004

Clasa a VIII-a

1. a)Rezolvați ecuația: $x_1 + x_2 + ...+ x_{2004} - 1 = 1002 .2005$, unde $x_1, x_2 ,..., x_{2004}$ sunt numere naturale nenule, distincte două câte două.

b)Arătați $\sqrt{x^{2004}+(x+1)^{2004}+(x+2)^{2004}} \notin \mathbf{N}$, oricare ar fi $x \in \mathbf{N}$.

c) Demonstrați că dacă $x_1 + x_2 + ...+ x_{2004} = 2004^3$, unde $x_1, x_2 ,..., x_{2004}$ sunt numere naturale, atunci $x_1^7+x_2^7+...+x_{2004}^7$ -1 este divizibil cu 7.

Prof. *Nicolae Ivăşchescu*, Craiova
Prof. *Nicolae Tălău*, Craiova

2. Fie ABC un triunghi oarecare şi $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$ şi $\frac{AM}{MB} > \frac{AN}{NC}$. Să se arate că are loc inegalitatea:

$$MN < \min\left(\frac{AC+BC}{2}, \frac{\sqrt{9AB^2+4BC^2}}{6}\right)$$

Prof.*Cristian Chiser, Craiova*
Prof. *Nicolae Ivăşchescu*, Craiova

3. a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $x^3 - 3y = 1$

Prof. *Nicolae Ivăşchescu*, Craiova

b)Fie $a,b,c \in [-3, \infty)$ astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 = 0$. Arătați că $a + b + c \le 3$.

Prof. *Liviu Smarandache*, Craiova

Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la10.
Un punct se acordă din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEȘTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a VI-a

Craiova, 30 octombrie 2004

Clasa a IX-a

1. Determinați numerele întregi a,b,c,d şi numărul prim p, ştiind că:

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc = d \text{ şi } a^2c + b^2a + c^2b + abc = p - d$$

Robert Csetnek (G.M. 4/2004)

2. Fie n un număr natural nenul şi

$$E(x) = [x] + [x + \frac{1}{2}] + [x + \frac{2}{3}] + \ \dots\ + [x + \frac{n-1}{n}]$$

a) Arătați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $\{ x \} \le \frac{1}{n}$ are loc egalitatea:

$$[(n-1)x] + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx] \qquad (1)$$

şi deduceți că $E(x) = [nx]$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ astfel încât $\{ x \} \le \frac{1}{n}$;

b) Determinați toate numerele reale x pentru care este adevărată (1).

Prof. Mihai Dicu

3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic şi O centrul cercului circumscris acestui triunghi. Notăm cu **M** mulțimea punctelor din planul triunghiului care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $O \in$ **M**;

ii) $\Delta ABC \subset$ **M**; (Reamintim: $\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$)

iii) Dacă $P,Q \in \Delta ABC$ şi R este un punct din plan astfel încât $\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$, atunci $R \in$ **M**.

Demonstrați că **M** conține suprafața triunghiulară $[ABC]$.

Prof. Ion Pătraşcu

(Selecție realizată de prof. Mihai Dicu)

Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la10.
Un punct se acordă din oficiu
Timp de lucru: 2 ore.

COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEȘTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ GHEORGHE DUMITRESCU
Ediția a VI-a
Craiova, 30 octombrie 2004

Clasa a X-a

1. Să se arate că șirul $(a_n)_{n>0}$ dat prin relația de recurență

$$a_{n+1} = \frac{n}{a_n} + 1 \ (n>0) \text{ și } a_1 = 1$$

are proprietatea: $a_n \leq a_{n+1}, (\forall)\, n>0.$

Prof. Laurențiu Panaitopol (G.M.2/2002)

2. Determinați mulțimea $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ dată prin:

$$\mathbf{M} = \{ (x,y,z) \mid [(\div\, \sin x, \sin y, \sin z) \wedge (∻\, \cos x, \cos y, \cos z)] \vee$$
$$\vee [(\div\, \cos x, \cos y, \cos z) \wedge (∻\, \sin x, \sin y, \sin z)] \}$$

Prof. Mihai Dicu

3 a) Folosind definiția funcției concave arătați că funcția $f:(0, \infty) \to \mathbf{R}$, dată prin $f(x) = \frac{x}{x+1}$ este o funcție concavă.

b) Folosind, eventual, punctul a) demonstrați că dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ și $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt numere reale strict pozitive astfel încât :

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n} \geq n-1$$

atunci $$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} \geq n(n-1)\,.$$

Prof. Lucian Tuțescu,
Prof. Ghiorghi Ioncev(Bulgaria)

(Selecție realizată de prof. Mihai Dicu)

Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la10.
Un punct se acordă din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEȘTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a VI-a

Craiova, 30 octombrie 2004

Clasa a XI-a

1. Să se calculeze :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n})}{e^{\sqrt{n}}}\right)^{\frac{\log_n 2}{n}}$$

Prof. Sever Pop (G.M. 7/8 /2004)

2. Fie $x_1 \in \mathbf{R}$ și $(x_n)_{n>0}$ șirul de numere reale dat prin relația de recurență

$$(n+1)x_{n+1} + n! = (n+1)^2 x_n \quad (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*.$$

Arătați că $(x_n)_{n>0}$ este șir divergent și există o singură valoare a lui x_1 astfel încât șirul $(y_n)_{n>0}$ dat prin $y_n = \dfrac{x_n}{(n-1)!}$ să fie convergent. Determinați x_1.

Prof. Cristian Moanță

4. Vom spune că o matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ are proprieteatea (P) dacă cele patru elemente ale sale sunt în progresie aritmetică, într-o anumită ordine.

a) Arătați că dacă A, A^3, A^{2004} au proprietatea (P) atunci și A^n are proprietatea (P) pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

b) Construiți o matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât A șiA^3 au proprietatea (P) iar A^{2004} nu are proprietatea (P).

Prof. Marius Ghergu

(Selecție realizată de prof. Mihai Dicu)

Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la10.
Un punct se acordă din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEȘTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a VI-a

Craiova, 30 octombrie 2004

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea $\mathbf{C}^*$ definim legea de compoziție **o** dată prin $x \mathbf{o} y = x/\overline{y}$.
determinați toate părțile finite ale mulțimii **C***, stabile față de legea **o**.

Claudia Marchitan (G.M. 5/6/2004)

2. Sã se arate cã nu există funcții $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care admit o primitivă F asfel încât e^F să fie o primitivă pe **R** a funcției e^f.

Prof. Marius Ghergu

3. Fie h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ o funcție continuă, $l > 0$și $n \in \mathbf{N}$. Notăm cu H primitiva funcției h^n astfel încât H(0) = 0. Dacă $\lim_{x\to\infty} h(x)H(x) = l$, atunci arătați că

$$\lim_{x\to\infty} x[h(x)]^{n+1} = \frac{l}{n+1}$$

Prof. Mariana Militaru(Lyon, Franța)

(Selecție realizată de prof.Mihai Dicu)

Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la10.
Un punct se acordă din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.