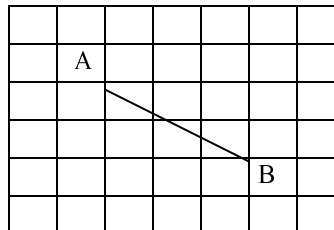


CONCURSUL DE MATEMATICĂ
GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a VI-a
Craiova, 30 octombrie 2004

Clasa a VII-a

1. a) Pe o foaie de caiet de matematică (cu pătrățele) avem desenat segmentul AB (ca în figura alăturată). Folosind o riglă negradată, construiți mediatoarea segmentului AB. Justificați.



Prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova

b) Fie dreptunghiul ABCD cu $AB = 2BC$. Pe latura BC construim în exteriorul dreptunghiului triunghiul dreptunghic isoscel CBE cu $BC = BE$. Calculați măsura unghiului format de AC cu DE.

Prof. Nicolae Tălău, Craiova

1. a) Demonstrați că nu există $a, b \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât:

$$3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = a^2 + b^2$$

Prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova

b) Să se afle numărul de perechi de numere naturale m, n prime între ele care satisfac

condiția : $\frac{13m-12n}{m+n} \in \mathbb{N}^*$.

Prof. Felician Preda, Craiova
Prof. C-tin Preda, Afumați, Dolj

Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la 10.

Un punct se acordă din oficiu.

Timp de lucru: 2 ore.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a VI-a
Craiova, 30 octombrie 2004

Clasa a VIII-a

1. a) Rezolvați ecuația: $x_1 + x_2 + \dots + x_{2004} - 1 = 1002 \cdot 2005$, unde $x_1, x_2, \dots, x_{2004}$ sunt numere naturale nenule, distincte două câte două.

b) Arătați $\sqrt{x^{2004} + (x+1)^{2004} + (x+2)^{2004}} \notin \mathbf{N}$, oricare ar fi $x \in \mathbf{N}$.

c) Demonstrați că dacă $x_1 + x_2 + \dots + x_{2004} = 2004^3$, unde $x_1, x_2, \dots, x_{2004}$ sunt numere naturale, atunci $x_1^7 + x_2^7 + \dots + x_{2004}^7 - 1$ este divizibil cu 7.

Prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova
Prof. Nicolae Tălău, Craiova

2. Fie ABC un triunghi oarecare și $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$ și

$\frac{AM}{MB} > \frac{AN}{NC}$. Să se arate că are loc inegalitatea:

$$MN < \min\left(\frac{AC+BC}{2}, \frac{\sqrt{9AB^2+4BC^2}}{6}\right)$$

Prof. Cristian Chiser, Craiova
Prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova

3. a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $x^3 - 3y = 1$

Prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova

b) Fie $a, b, c \in [-3, \infty)$ astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 = 0$. Arătați că $a + b + c \leq 3$.

Prof. Liviu Smarandache, Craiova

Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la 10.

Un punct se acordă din oficiu.

Timp de lucru: 2 ore.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a VI-a
Craiova, 30 octombrie 2004

Clasa a IX-a

1. Determinați numerele întregi a, b, c, d și numărul prim p , știind că:

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc = d \text{ și } a^2c + b^2a + c^2b + abc = p - d$$

Robert Csetnek (G.M. 4/2004)

2. Fie n un număr natural nenul și

$$E(x) = [x] + [x + \frac{1}{2}] + [x + \frac{2}{3}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}]$$

- a) Arătați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $\{x\} \leq \frac{1}{n}$ are loc egalitatea:

$$[(n-1)x] + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx] \quad (1)$$

și deduceți că $E(x) = [nx]$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ astfel încât $\{x\} \leq \frac{1}{n}$;

- b) Determinați toate numerele reale x pentru care este adevărată (1).

Prof. Mihai Dicu

3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și O centrul cercului circumscris acestui triunghi. Notăm cu \mathbf{M} mulțimea punctelor din planul triunghiului care îndeplinesc simultan condițiile:

- i) $O \in \mathbf{M}$;
ii) $\Delta ABC \subset \mathbf{M}$; (Reamintim: $\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$)
iii) Dacă $P, Q \in \Delta ABC$ și R este un punct din plan astfel încât $\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$, atunci $R \in \mathbf{M}$.

Demonstrați că \mathbf{M} conține suprafața triunghiulară $[ABC]$.

Prof. Ion Pătrașcu

(Selecție realizată de prof. Mihai Dicu)

Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la 10.

Un punct se acordă din oficiu

Timp de lucru: 2 ore.

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ
GHEORGHE DUMITRESCU
Ediția a VI-a
Craiova, 30 octombrie 2004**

Clasa a X-a

1. Să se arate că șirul $(a_n)_{n>0}$ dat prin relația de recurență

$$a_{n+1} = \frac{n}{a_n} + 1 \quad (n>0) \text{ și } a_1 = 1$$

are proprietatea: $a_n \leq a_{n+1}, (\forall) n>0.$

Prof. Laurențiu Panaitopol (G.M.2/2002)

2. Determinați mulțimea $\mathbf{M} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dată prin:

$$\mathbf{M} = \{ (x,y,z) \mid [(\div \sin x, \sin y, \sin z) \wedge (\div \cos x, \cos y, \cos z)] \vee \\ \vee [(\div \cos x, \cos y, \cos z) \wedge (\div \sin x, \sin y, \sin z)] \}$$

Prof. Mihai Dicu

3 a) Folosind definiția funcției concave arătați că funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, dată prin $f(x) = \frac{x}{x+1}$ este o funcție concavă.

b) Folosind, eventual, punctul a) demonstrați că dacă $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ și x_1, x_2, \dots, x_n sunt numere reale strict pozitive astfel încât :

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq n-1$$

atunci $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq n(n-1).$

Prof. Lucian Tuțescu,
Prof. Ghiorghe Ioncev(Bulgaria)

(Selecție realizată de prof. Mihai Dicu)

**Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la 10.
Un punct se acordă din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.**

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a VI-a
Craiova, 30 octombrie 2004

Clasa a XI-a

1. Să se calculeze :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})}{e^{\frac{\log_2 n}{n}}} \right)$$

Prof. Sever Pop (G.M. 7/8 /2004)

2. Fie $x_1 \in \mathbf{R}$ și $(x_n)_{n>0}$ șirul de numere reale dat prin relația de recurență

$$(n+1)x_{n+1} + n! = (n+1)^2 x_n \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Arătați că $(x_n)_{n>0}$ este șir divergent și există o singură valoare a lui x_1 astfel încât

șirul $(y_n)_{n>0}$ dat prin $y_n = \frac{x_n}{(n-1)!}$ să fie convergent. Determinați x_1 .

Prof. Cristian Moanță

4. Vom spune că o matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ are proprietatea (P) dacă cele patru elemente ale sale sunt în progresie aritmetică, într-o anumită ordine.

a) Arătați că dacă A, A^3, A^{2004} au proprietatea (P) atunci și A^n are proprietatea (P) pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

b) Construiți o matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât A și A^3 au proprietatea (P) iar A^{2004} nu are proprietatea (P).

Prof. Marius Ghergu

(Selecție realizată de prof. Mihai Dicu)

Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la 10.

Un punct se acordă din oficiu.

Timp de lucru: 2 ore.

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ
GHEORGHE DUMITRESCU**

Ediția a VI-a
Craiova, 30 octombrie 2004

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea \mathbf{C}^* definim legea de compoziție \circ dată prin $x \circ y = x/\bar{y}$.
determinați toate părțile finite ale mulțimii \mathbf{C}^* , stabile față de legea \circ .

Claudia Marchitan (G.M. 5/6/2004)

2. Să se arate că nu există funcții $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ care admit o primitivă F astfel încât e^F să
fie o primitivă pe \mathbf{R} a funcției e^f .

Prof. Marius Ghergu

3. Fie $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ o funcție continuă, $l > 0$ și $n \in \mathbf{N}$. Notăm cu H primitiva funcției h^n astfel
încât $H(0) = 0$. Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)H(x) = l$, atunci arătați că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x[h(x)]^{n+1} = \frac{l}{n+1}$$

Prof. Mariana Militaru(Lyon, Franța)

(Selecție realizată de prof.Mihai Dicu)

*Notă: Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la 10.
Un punct se acordă din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.*