SOLUȚII

Clasa a VII-a

1.a) Se construieşte pătratul cu diagonala AB şi se duce cealaltă diagonală.
b)Ducem DF||AC şi rezultă că triunghiul DFE este dreptunghic isoscel.Găsim $m(\angle COE) = 45^o$.

1. a) Se arată că membrul stâng este de forma M9 + 3 şi membrul drept $\neq$ M9 + 3.
b) Observăm că m>n. Din (m + n)|(13m – 12n) şi(m + n)|(13m +12n) rezultă că (m + n)|25m.Ținând cont că m>n şi (m,n) = 1 avem două cazuri importante: m + n = 5 şi m + n = 25. Găsim 12 soluții.

Clasa a VIII-a

1. a) Deoarece 1 + 2 + 3 +...+ 2004 = 1002.2005, găsim că soluțiile ecuației sunt: 1,2,3,...,2003,2005.
b) Deoarece numerele x, x +1, x + 2 sunt consecutive ele vor fi de forma 3k, 3k + 1, 3k + 2 şi în consecință numărul de sub radical este de forma M3 + 2,ceea ce înseamnă că nu va fi pătrat perfect etc.
c) Se arată că x^7- x este divizibil cu 7, pentru orice x natural şi în consecință $x_1^7+x_2^7+\cdots x_{2004}^7$-($x_1 + x_2 + ...+ x_{2004}$) este divizibil cu 7. De aici găsim că $x_1 + x_2 + ...+ x_{2004}$ şi 2004^3 dau acelaşi rest la împărțirea cu 7.Cum 2004^3 = M7 + 1 rezultă că $x_1^7+x_2^7+\cdots x_{2004}^7$ - 1 se divide cu 7.

2. Notăm $\frac{AM}{MB}$ = k, $\frac{AN}{NC}$ = p, k>1/2, p< 1/2 .Din triunghiul AMN se exprimă MN^2 cu teorema cosinusului. în funcție de AB, AC, BC şi rapoartele k şi p:

$$MN^2 = \frac{k^2}{(k+1)^2}AB^2 + \left[\frac{p^2}{(p+1)^2} - \frac{kp}{(k+1)(p+1)}\right]AC^2 + \frac{kp}{(k+1)(p+1)}(BC^2 - AB^2)$$

Neglijând termenii negativi se obține:

$$MN^2 < \frac{k^2}{(k+1)^2}AB^2 + \frac{kp}{(k+1)(p+1)}BC^2$$ şi tinând cont de condițiile pentru p şi k,

în final $MN^2 < \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{9}BC^2$.

Pentru a arăta că MN< $\frac{1}{2}$(AC + BC) ducem MR || BC, R$\in$(NC).

Avem MN< MR + NR = $\frac{k}{k+1}BC + \frac{k-p}{(k+1)(p+1)}AC < \frac{1}{2}(AC + BC)$.

3. a) Din $x^3 - 1 = 3y$ rezultă că x^3 = M3 + 1.Dar x = 3k sau x = 3k + 1 sau x = 3k + 2 . Convine doar x = 3k + 1 şi apoi $y = 9k^2 + 9k + 3k$.
b) Din a $\geq$-3 avem $(a + 3)(a – 3/2)^2 \geq 0$, de unde găsim $27a/4 \leq a^3 + 27/4$ şi celelalte. Adunându-le obținem $(27/4)(a + b + c) \leq a^3 + b^3 + c^3 + 3.27/4$. Clar că vom avea $a + b + c \leq 3$.

Clasa a IX-a

1.Adunând cele două ecuații se obține (a + b)(b + c)(c + a) = p. Cum p este prim avem p = 1.1.p sau p = 1(-1)(-p) sau p = (-1)(-1).p şi în consecință putem scrie:
a + b = 1, b + c = 1, c + a =p sau a + b = 1, b + c = -1, c + a = -p sau a + b = -1, b + c = -1, c + a = p
În primul caz găsim p = 2. d = 1, {a,b,c} = { 0,1,1},
în aldoilea caz găsim p = 2, d = -2, {a,b,c} = {-2,0,1},
în al treilea caz găsim p = 2, d = 1, {a,b,c} = {-2,1, 1}.

2. a) (1) este echivalentã cu $[(n-1)\{x\}] + [\{x\} + \frac{n-1}{n}] = [n\{x\}]$ (2)

Pentru $\{x\}<\frac{1}{n}$ avem 0 + 0 = 0 iar pentru $\{x\}=\frac{1}{n}$ avem 0 + 1 = 1.

Clar că $\{x\}<\frac{1}{n}<...<\frac{1}{k}<...\frac{1}{2}$ şi putem face verificare directă sau adunăm toate egalitățile de tip

$[(k-1)x] + [x + \frac{k-1}{k}] = [kx]$, $k\in\{2,3,...n\}$.

b) 1) Dacă n = 1 atunci ecuația se reduce la [x] = [x] cu soluția **R**.

2) Dacă n = 2 atunci ecuația se reduce la $[x] + [x+\frac{1}{2}] = [2x]$ cu soluția **R**.

3) Dacă n > 2 atunci folosim (2). Mai întâi să observăm că $[\{x\} + \frac{n-1}{n}]\in\{0, 1\}$şi de asemenea $D = [n\{x\}] - [(n-1)\{x\}] \in \{0, 1\}$(Presupunerea că ar fi mai mare sau egală cu 2 duce la contradicție). Deci egalitatea poate fi de forma 0 + 0 = 0 , pt. $\{x\}<\frac{1}{n}$ sau de forma 0 + 1 = 1, pt. $\frac{1}{n}\le\{x\}<\frac{1}{n-1}$. Pentru găsirea altor soluții cu $\frac{1}{n-1}\le\{x\}$, împărțim intervalul (0, 1) în n(n-1) intervale de forma $[\frac{k}{n(n-1)}, \frac{k+1}{n(n-1)})$ cu n < k <n(n-1). Numărul x cu $\frac{k}{n(n-1)} \le \{x\} < \frac{k+1}{n(n-1)}$ este soluție dacă şi numai dacă $[n\{x\}] - [(n-1)\{x\}] = 1$ adică $[\frac{nk}{n(n-1)}] \ne [\frac{(n-1)k}{n(n-1)}]$ sau $[\frac{k}{n-1}]\ne[\frac{k}{n}]$.

Concluzie: Pt. n>2 numărul x este soluție dacă $0\le\{x\}<\frac{1}{n-1}$ sau $\frac{k}{n(n-1)} \le \{x\} < \frac{k+1}{n(n-1)}$ cu n < k <n(n-1), unde k este natural cu $[\frac{k}{n-1}]\ne[\frac{k}{n}]$.

3.Este suficient să arătăm că dacă $X \in Int\,\Delta ABC$, atunci $X\in$ **M**. Notăm cu M mijlocul segmentului [OX]. Ducem prin M paralele la AB şi AC care intersectează [AC] şi [AB], respectiv în U şi V. Paralela prin M la UV intersectează [AB] în K şi [AC] în l. Avem $[MK] \equiv [ML]$ şi $[OM] \equiv [MX]$, de unde rezultă că OKXL este paralelogram. Deoarece $\vec{OK}+\vec{OL}=\vec{OX}$, $K\in(AB)$, $L\in(AC)$, rezultă că $X \in$ **M**.

Clasa a X-a

1. Mai întâi demonstrăm prin inducție completă că $a_n \le \sqrt{n} + \frac{1}{2}$ pentru $n \ge 3$.

Cum $a_3 = 2 \le \sqrt{3} + \frac{1}{2}$ etapa de verificare este încheiată.

Presupunem relația adevărată pentru n-1 și n.

Rezultă $a_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{1+\dfrac{n-1}{a_{n-1}}} \le 1 + \dfrac{n}{1+\dfrac{n-1}{\sqrt{n-1}+\frac{1}{2}}} \le \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}$, ultima inegalitate demonstrându-se direct.

Apoi $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n}{a_n} + 1 - a_n \ge \dfrac{n}{\sqrt{n}+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{4(\sqrt{n}+\frac{1}{2})} > 0$.

Deci $a_1 \le a_2 \le a_3$ și $a_n \le a_{n+1}$ pentru $n \ge 3$, adică șirul dat este crescător.

2. Avem cazurile:

I. $\sin x + \sin z = 2\sin y$ și $\cos x \cos z = (\cos y)^2$.

Eliminând pe y se obține egalitatea $2(1 - \cos(x - z)) + (\cos x - \cos z)^2 = 0$ de unde rezultă sistemul

$\cos(x - z) = 1$

$\cos x = \cos z$.

De aici avem $z-x = 2k\pi$ și $z = \pm x + 2j\pi$ ($k, j \in \mathbf{Z}$) cu soluțiile

$(x, (-1)^n x + n\pi, x + p\pi)$ cu $n, p \in \mathbf{Z}$ (1)

$(m\pi, n\pi, p\pi)$ cu $m,n,p \in \mathbf{Z}$ și $m + p$ par (2) .

II $\cos x + \cos z = 2\cos y$ și $\sin x \sin z = (\sin y)^2$

După ce eliminăm pe y avem egalitatea $2(1 - \cos(x - z)) + (\sin x - \sin z)^2 = 0$ și apoi sistemul

$\cos(x - z) = 1$

$\sin x = \sin z$.

De aici gãsim $z-x = 2k\pi$ și $z = (-1)^j x + j\pi$ ($k, j \in \mathbf{Z}$) cu soluțiile

$(x, (-1)^n x + n\pi, x + p\pi)$ cu $n, p \in \mathbf{Z}$ (1)

$\left((2m + 1)\frac{\pi}{2}, (2n + 1)\frac{\pi}{2}, (2p + 1)\frac{\pi}{2}\right)$ cu $m,n,p \in \mathbf{Z}$ și $m + p$ par (3).

M este reuniunea soluțiilor (1),(2),(3).

3. a) $f:(0, \infty) \to \mathbf{R}$ este concavă dacă $(\forall)\ x_1,x_2 \in (0, \infty)$ și $(\forall)\ \alpha \in [0,1]$ avem

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \ge \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

Scriind f sub forma $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$,prin calcul, inegalitatea de mai sus se reduce la

$\alpha.(1-\alpha)(x_1 - x_2)^2 \ge 0$.

a) Din inegalitatea lui Jensen pentru funcții concave scrisă pentru numerele

$\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}$ avem $f\left(\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}\right)/n\right) \ge \left(f\left(\dfrac{1}{x_1}\right) + f\left(\dfrac{1}{x_2}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{1}{x_n}\right)\right)/n$.

Cum $f(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$ obținem $1/\left(1 + \dfrac{n}{E}\right) \ge \left(\dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + \ldots + \dfrac{1}{1+x_n}\right)/n \ge \dfrac{n-1}{n}$,unde

$E = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}$ .De aici clar $1+ \dfrac{n}{E} \le \dfrac{n}{n-1}$ sau $\dfrac{n}{E} \le \dfrac{1}{n-1}$ și în consecință

$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} \ge n(n-1)$.

Clasa a XI-a

1. Avem o nedeterminare de forma ∞^0. Folosind formula $(a_n)^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$ calculăm

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ln a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n})-\sqrt{n}}{n\log_2 n}\right)$ este nedeterminare de forma $\frac{\infty}{\infty}$

care se poate calcula cu lema lui Stolz-Cesaro:

$\lim\limits_{n\to\infty}$ (ln x_{n+1} - $\sqrt{n+1}$ -ln x_n + $\sqrt{n}$)/((n+1)$\log_2$(n+1) – n$\log_2$n) =

$\lim\limits_{n\to\infty}$ (ln(1+$\sqrt{n+1}$) - $\sqrt{n+1}$ + $\sqrt{n}$)/($\log_2$(n+1) + $\log_2(\frac{n+1}{n})^n$) = $\frac{\ln 2}{2}$ după ce dăm factor forțat ln n.

În final se obține $e^{\frac{\ln 2}{2}} = \sqrt{2}$.

2.Pentru k $\geq$ 1 scriem relația sub forma $x_{k+1} = (k+1)x_k - \frac{(k+1)!}{(k+1)^2}$ pe care o

înmulțim cu (n + 1)n(n -1)...(k + 1) cu k = $\overline{2,n-2}$.
Adunând gãsim

$$x_n = n!x_1 - n!(1/2^2 + 1/3^2 + ...+ 1/n^2)$$ iar

$$y_n = n(x_1 - \frac{\pi^2}{6} + 1) + n(\frac{\pi^2}{6} - 1/2^2 - 1/3^2 - ... - 1/n^2)$$

Ținând seama că $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{\pi^2}{6} - 1/2^2 - 1/3^2 - ... - 1/n^2) = 1$ rezultă că x_n este divergent iar y_n este

convergent doar pentru $x_1 = \frac{\pi^2}{6} - 1$.

3. a) Se ştie că A verifică egalitatea $A^2 - \alpha A + \beta I_2 = O_2$ unde α = Tr(A) şi β = det(A).
Atunci $A^3 = (\alpha^2 - \beta)A - \alpha\beta I_2 = O_2$ (*). Se observă că $(\alpha^2 - \beta)$A are proprietatea (P).
Pe de altă parte dacă $(\alpha^2 - \beta)A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, din (*) şi din faptul că A^3 are proprietatea (P) rezultã că

numerele x- $\alpha\beta$,y,z,t- $\alpha\beta$ sunt în progresie aritmetică (nu neapărat în această ordine.
Ținând cont că numerele x,y,z,t sunt în progresie arimetică (nu neapărat în această ordine),
deducem că $\alpha\beta = 0$, analizând fiecare caz în parte ținând seama că numerele fiind în progresie arimetică suma a două dintre ele este egală cu suma celorlalte două.
Dacă β = 0 atunci $A^2 = \alpha A$ de unde $A^n = \alpha^{n-1}A$ are proprietatea (P) pentru orice n>1.
Dacă α = 0 atunci $A^2 = -\beta I_2$ şi din faptul că $A^{2004} = \beta^{2004} I_2$ are proprietatea (P) rezultă că β = 0.Se obține că $A^n = O_2$ are proprietatea (P) pentru orice n>1.

b) Putem lua A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Clasa a XII-a

1.Fie $\mathbf{H} \subset \mathbf{C}^*$ astfel de mulțime şi $z \in \mathbf{H}$ fixat. Funcția f: $\mathbf{H} \to \mathbf{H}$ definită prin $f(x) = \frac{z}{x}$ este injectivă . Cum **H** este finită rezultă că f este surjectivă şi deci există $z_o \in \mathbf{H}$ astfel încât $F(z_o) = z$ de unde $z_o = 1$. Deci $1 \in \mathbf{H}$. Prin inducție demonstrăm că $X_n = (((zoz)oz)o...oz) = z/(\bar{z})^{n-1}$,compunerea făcându-se de n ori, n>0. Mulțimea acestor compuse este inclusă în **H**. Cum **H** este finită există i şi j astfel încât $X_i = X_j$, adică există un n_z natural pentru care $z^{n_z} = 1$. Dacă $\mathbf{H} = \{z_1, z_2, z_3, ..., z_n\}$ atunci $zoz_1.zoz_2.....zoz_n = z_1.z_2...z_n$ şi în final $\mathbf{H} = U_n$,n>0.

2.Cum f admite primitive, f are proprietatea lui Darboux şi în consecință $f(\mathbf{R}) = I$ – interval din ipoteză $(e^F)' = e^f$, apoi $f = e^{f-F}$ şi deci $f(x) > 0$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Logaritmând găsim $F(x) = f(x)-\ln f(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$ (1).Prin reducere la absurd, arătăm că $1 \notin I$. Dacă există $x_o \in \mathbf{R}$ cu $f(x_o) = 1$. Din (1) avem şi $F(x_o) = 1$. Dar $f(x) = e^{f(x)-F(x)} \geq f(x)-F(x) + 1$,de unde avem $F(x) \geq 1 = F(x_o)$, adică x_o este punct de minim. Dar $f(x_o) = F'(x_o) = 0$, fals!.
Deci $I \subset (1, \infty)$ sau $I \subset (0, 1)$.

a)$f(x) > 1$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Folosim faptul că funcția g: $(1, \infty) \to (1, \infty)$, $g(t) = t-\ln t$ este bijectivă, derivabilă şi $g' > 0$. Cum $F = g(f)$, găsim $f = g^{-1}(F)$ de unde rezultă că f este derivabilă pe **R**. Derivând (1) găsim $f = f' - f'/f$ şi apoi $f'/f - f'/f^2 = 1$ sau $\ln f(x) + 1/f(x) = x + C > 0$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, fals!.

b) $0 < f(x) < 1$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Folosind funcția bijectivă h : $(0,1) \to (1, \infty)$, $h(x) = t - \ln t$, după un raționament asemănător cu cel de la a) se ajunge tot la contradictie.

3.Lemă. Fie o funcție f: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ derivabilă cu derivata continuă ,$l > 0$ şi P un polinom de grad n. Dacă $\lim_{x\to\infty} f'(x) P(f(x)) = l$ atunci arătați că există $a \neq 0$ astfel încât

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{n+1} / x = l(n+1)/a$$

Demonstrația lemei: Dacă Q este o primitivă a lui P atunci avem $\lim_{x\to\infty} (Qof)'(x) = l$ şi, aplicând regula lui L'Hospital găsim că $\lim_{x\to\infty} (Q \circ f)(x)/x = l$ de unde $\lim_{x\to\infty} (Q \circ f)(x) = \infty$.

Vom arăta că $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Pentru aceasta fie A>0. Cum Q este o funcție continuă ea este şi mărginită pe intervalul [0,A]. Deci există C>0 astfel încât $Q(f(x)) \leq C$ dacă $0 \leq f(x) \leq A$. Dar există x_o astfel încât $Q(f(x)) > C$ dacă $x > x_o$. $f(x) > 0$ implică faptul că $f(x) > A$, dacă $x > x_o$, ceea ce demonstrează că $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Acum notând cu a coeficientul dominant al lui P, avem $\lim_{x\to\infty} Q(x)/x^{n+1} = a/(n+1)$ şi apoi $\lim_{x\to\infty} Q(f(x))/[f(x)]^{n+1} = a/(n+1)$.

Deci $\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{n+1} / x = \lim_{x\to\infty} [f(x)]^{n+1} / Q(f(x)) . \lim_{x\to\infty} (Q \circ f)(x)/x = l(n+1)/a$.

Pentru rezolvarea problemei aplicăm lema luând $f(x) = H(x)$, $x \geq 0$ şi $P = X^n$.