

SOLUȚII

Clasa a VII-a

1. a) Se construiește pătratul cu diagonala AB și se duce cealaltă diagonală.
b) Ducem $DF \parallel AC$ și rezultă că triunghiul DFE este dreptunghic isoscel. Găsim $m(\angle COE) = 45^\circ$.
1. a) Se arată că membrul stâng este de forma $M9 + 3$ și membrul drept $\neq M9 + 3$.
b) Observăm că $m > n$. Din $(m + n)|(13m - 12n)$ și $(m + n)|(13m + 12n)$ rezultă că $(m + n)|25m$. Ținând cont că $m > n$ și $(m, n) = 1$ avem două cazuri importante:
 $m + n = 5$ și $m + n = 25$. Găsim 12 soluții.

Clasa a VIII-a

1. a) Deoarece $1 + 2 + 3 + \dots + 2004 = 1002 \cdot 2005$, găsim că soluțiile ecuației sunt:
 $1, 2, 3, \dots, 2003, 2005$.
- b) Deoarece numerele $x, x + 1, x + 2$ sunt consecutive ele vor fi de forma $3k, 3k + 1, 3k + 2$ și în consecință numărul de sub radical este de forma $M3 + 2$, ceea ce înseamnă că nu va fi pătrat perfect etc.
- c) Se arată că $x^7 - x$ este divizibil cu 7, pentru orice x natural și în consecință $x_1^7 + x_2^7 + \dots + x_{2004}^7 - (x_1 + x_2 + \dots + x_{2004})$ este divizibil cu 7. De aici găsim că $x_1 + x_2 + \dots + x_{2004}$ și 2004^3 dau același rest la împărțirea cu 7. Cum $2004^3 = M7 + 1$ rezultă că $x_1^7 + x_2^7 + \dots + x_{2004}^7 - 1$ se divide cu 7.
2. Notăm $\frac{AM}{MB} = k, \frac{AN}{NC} = p, k > 1/2, p < 1/2$. Din triunghiul AMN se exprimă MN^2 cu teorema cosinusului. în funcție de AB, AC, BC și rapoartele k și p:

$$MN^2 = \frac{k^2}{(k+1)^2} AB^2 + \left[\frac{p^2}{(p+1)^2} - \frac{kp}{(k+1)(p+1)} \right] AC^2 + \frac{kp}{(k+1)(p+1)} (BC^2 - AB^2)$$

Neglijând termenii negativi se obține:

$$MN^2 < \frac{k^2}{(k+1)^2} AB^2 + \frac{kp}{(k+1)(p+1)} BC^2 \text{ și tinând cont de condițiile pentru } p \text{ și } k,$$

$$\text{în final } MN^2 < \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{9} BC^2.$$

Pentru a arăta că $MN < \frac{1}{2}(AC + BC)$ ducem $MR \parallel BC, R \in (NC)$.

$$\text{Avem } MN < MR + NR = \frac{k}{k+1} BC + \frac{k-p}{(k+1)(p+1)} AC < \frac{1}{2}(AC + BC).$$

3. a) Din $x^3 - 1 = 3y$ rezultă că $x^3 = M3 + 1$. Dar $x = 3k$ sau $x = 3k + 1$ sau $x = 3k + 2$.
Convine doar $x = 3k + 1$ și apoi $y = 9k^2 + 9k + 3k$.

b) Din $a \geq -3$ avem $(a + 3)(a - 3/2)^2 \geq 0$, de unde găsim $27a/4 \leq a^3 + 27/4$ și celelalte.
Adunându-le obținem $(27/4)(a + b + c) \leq a^3 + b^3 + c^3 + 3 \cdot 27/4$. Clar că vom avea $a + b + c \leq 3$.

Clasa a IX-a

1. Adunând cele două ecuații se obține $(a + b)(b + c)(c + a) = p$. Cum p este prim avem $p = 1, 1 \cdot p$ sau $p = 1(-1)(-p)$ sau $p = (-1)(-1) \cdot p$ și în consecință putem scrie:
 $a + b = 1, b + c = 1, c + a = p$ sau $a + b = 1, b + c = -1, c + a = -p$ sau $a + b = -1, b + c = -1, c + a = p$
 În primul caz găsim $p = 2, d = 1, \{a, b, c\} = \{0, 1, 1\}$,
 în aldoilea caz găsim $p = 2, d = -2, \{a, b, c\} = \{-2, 0, 1\}$,
 în al treilea caz găsim $p = 2, d = 1, \{a, b, c\} = \{-2, 1, 1\}$.

2. a) (1) este echivalentă cu $[(n-1)\{x\}] + [\{x\} + \frac{n-1}{n}] = [n\{x\}]$ (2)

Pentru $\{x\} < \frac{1}{n}$ avem $0 + 0 = 0$ iar pentru $\{x\} = \frac{1}{n}$ avem $0 + 1 = 1$.

Clar că $\{x\} < \frac{1}{n} < \dots < \frac{1}{k} < \dots < \frac{1}{2}$ și putem face verificare directă sau adunăm toate egalitățile de tip

$$[(k-1)x] + [x + \frac{k-1}{k}] = [kx], k \in \{2, 3, \dots, n\}.$$

b) 1) Dacă $n = 1$ atunci ecuația se reduce la $[x] = [x]$ cu soluția \mathbf{R} .

2) Dacă $n = 2$ atunci ecuația se reduce la $[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$ cu soluția \mathbf{R} .

3) Dacă $n > 2$ atunci folosim (2). Mai întâi să observăm că $[\{x\} + \frac{n-1}{n}] \in \{0, 1\}$ și de asemenea $D = [n\{x\}] - [(n-1)\{x\}] \in \{0, 1\}$ (Presupunerea că ar fi mai mare sau egală cu 2 duce la contradicție). Deci egalitatea poate fi de forma $0 + 0 = 0$, pt. $\{x\} < \frac{1}{n}$ sau de forma $0 + 1 = 1$, pt.

$\frac{1}{n} \leq \{x\} < \frac{1}{n-1}$. Pentru găsirea altor soluții cu $\frac{1}{n-1} \leq \{x\}$, împărțim intervalul $(0, 1)$ în $n(n-1)$

intervale de forma $[\frac{k}{n(n-1)}, \frac{k+1}{n(n-1)})$ cu $n < k < n(n-1)$. Numărul x cu $\frac{k}{n(n-1)} \leq \{x\} < \frac{k+1}{n(n-1)}$

este soluție dacă și numai dacă $[n\{x\}] - [(n-1)\{x\}] = 1$ adică $[\frac{nk}{n(n-1)}] \neq [\frac{(n-1)k}{n(n-1)}]$

sau $[\frac{k}{n-1}] \neq [\frac{k}{n}]$.

Concluzie: Pt. $n > 2$ numărul x este soluție dacă $0 \leq \{x\} < \frac{1}{n-1}$ sau $\frac{k}{n(n-1)} \leq \{x\} < \frac{k+1}{n(n-1)}$

cu $n < k < n(n-1)$, unde k este natural cu $[\frac{k}{n-1}] \neq [\frac{k}{n}]$.

3. Este suficient să arătăm că dacă $X \in \text{Int } \Delta ABC$, atunci $X \in \mathbf{M}$. Notăm cu M mijlocul segmentului $[OX]$. Ducem prin M paralele la AB și AC care intersectează $[AC]$ și $[AB]$, respectiv în U și V . Paralela prin M la UV intersectează $[AB]$ în K și $[AC]$ în L . Avem $[MK] \equiv [ML]$ și $[OM] \equiv [MX]$, de unde rezultă că $OKXL$ este paralelogram. Deoarece $\vec{OK} + \vec{OL} = \vec{OX}$, $K \in (AB)$, $L \in (AC)$, rezultă că $X \in \mathbf{M}$.

1. Mai întâi demonstrăm prin inducție completă că $a_n \leq \sqrt{n} + \frac{1}{2}$ pentru $n \geq 3$.

Cum $a_3 = 2 \leq \sqrt{3} + \frac{1}{2}$ etapa de verificare este încheiată.

Presupunem relația adevărată pentru $n-1$ și n .

Rezultă $a_{n+1} = 1 + \frac{n}{1+\frac{n-1}{a_{n-1}}} \leq 1 + \frac{n}{1+\frac{n-1}{\sqrt{n-1} + \frac{1}{2}}} \leq \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}$, ultima inegalitate demonstrându-se direct.

Apoi $a_{n+1} - a_n = \frac{n}{a_n} + 1 - a_n \geq \frac{n}{\sqrt{n} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \sqrt{n} = \frac{1}{4(\sqrt{n} + \frac{1}{2})} > 0$.

Deci $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ și $a_n \leq a_{n+1}$ pentru $n \geq 3$, adică șirul dat este crescător.

2. Avem cazurile:

I. $\sin x + \sin z = 2\sin y$ și $\cos x \cos z = (\cos y)^2$.

Eliminând pe y se obține egalitatea $2(1 - \cos(x - z)) + (\cos x - \cos z)^2 = 0$ de unde rezultă sistemul

$$\cos(x - z) = 1$$

$$\cos x = \cos z$$

De aici avem $z - x = 2k\pi$ și $z = \pm x + 2j\pi$ ($k, j \in \mathbf{Z}$) cu soluțiile

$$(x, (-1)^n x + n\pi, x + p\pi) \text{ cu } n, p \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

$$(m\pi, n\pi, p\pi) \text{ cu } m, n, p \in \mathbf{Z} \text{ și } m + p \text{ par} \quad (2)$$

II $\cos x + \cos z = 2\cos y$ și $\sin x \sin z = (\sin y)^2$

După ce eliminăm pe y avem egalitatea $2(1 - \cos(x - z)) + (\sin x - \sin z)^2 = 0$ și apoi sistemul

$$\cos(x - z) = 1$$

$$\sin x = \sin z$$

De aici găsim $z - x = 2k\pi$ și $z = (-1)^j x + j\pi$ ($k, j \in \mathbf{Z}$) cu soluțiile

$$(x, (-1)^n x + n\pi, x + p\pi) \text{ cu } n, p \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

$$((2m + 1)\frac{\pi}{2}, (2n + 1)\frac{\pi}{2}, (2p + 1)\frac{\pi}{2}) \text{ cu } m, n, p \in \mathbf{Z} \text{ și } m + p \text{ par} \quad (3)$$

M este reuniunea soluțiilor (1),(2),(3).

3. a) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ este concavă dacă $(\forall) x_1, x_2 \in (0, \infty)$ și $(\forall) \alpha \in [0, 1]$ avem $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$.

Scriind f sub forma $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$, prin calcul, inegalitatea de mai sus se reduce la

$$\alpha \cdot (1 - \alpha)(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

a) Din inegalitatea lui Jensen pentru funcții concave scrisă pentru numerele

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n} \text{ avem } f\left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}\right) \geq \left(f\left(\frac{1}{x_1}\right) + f\left(\frac{1}{x_2}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)/n.$$

Cum $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ obținem $1/(1 + \frac{n}{E}) \geq (\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n})/n \geq \frac{n-1}{n}$, unde

$E = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$. De aici clar $1 + \frac{n}{E} \leq \frac{n}{n-1}$ sau $\frac{n}{E} \leq \frac{1}{n-1}$ și în consecință

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq n(n-1).$$

Clasa a XI-a

1. Avem o nedeterminare de forma ∞^0 . Folosind formula $(a_n)^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$ calculăm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \ln a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})-\sqrt{n}}{n \log_2 n} \right) \text{ este nedeterminare de forma } \frac{\infty}{\infty}$$

care se poate calcula cu lema lui Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln x_{n+1} - \sqrt{n+1} - \ln x_n + \sqrt{n}) / ((n+1)\log_2(n+1) - n \log_2 n) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(1+\sqrt{n+1}) - \sqrt{n+1} + \sqrt{n}) / (\log_2(n+1) + \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right)^n) = \frac{\ln 2}{2} \text{ după ce dăm factor forțat } \ln n.$$

În final se obține $e^{\frac{\ln 2}{2}} = \sqrt{2}$.

2. Pentru $k \geq 1$ scriem relația sub forma $x_{k+1} = (k+1)x_k - \frac{(k+1)!}{2}$ pe care o

înmulțim cu $(n+1)n(n-1)\dots(k+1)$ cu $k = \overline{2, n-2}$.

Adunând găsim

$$x_n = n!x_1 - n!(1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2) \text{ iar}$$

$$y_n = n(x_1 - \frac{\pi}{6} + 1) + n(\frac{\pi}{6} - 1/2^2 - 1/3^2 - \dots - 1/n^2)$$

Ținând seama că $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{\pi}{6} - 1/2^2 - 1/3^2 - \dots - 1/n^2) = 1$ rezultă că x_n este divergent iar y_n este

convergent doar pentru $x_1 = \frac{\pi}{6} - 1$.

3. a) Se știe că A verifică egalitatea $A^2 - \alpha A + \beta I_2 = O_2$ unde $\alpha = \text{Tr}(A)$ și $\beta = \det(A)$. Atunci $A^3 = (\alpha^2 - \beta)A - \alpha \beta I_2 = O_2$ (*). Se observă că $(\alpha^2 - \beta)A$ are proprietatea (P).

Pe de altă parte dacă $(\alpha^2 - \beta)A = \begin{pmatrix} xy \\ zt \end{pmatrix}$, din (*) și din faptul că A^3 are proprietatea (P) rezultă că numerele $x - \alpha \beta, y, z, t - \alpha \beta$ sunt în progresie aritmetică (nu neapărat în această ordine).

Ținând cont că numerele x, y, z, t sunt în progresie aritmetică (nu neapărat în această ordine), deducem că $\alpha \beta = 0$, analizând fiecare caz în parte ținând seama că numerele fiind în progresie aritmetică suma a două dintre ele este egală cu suma celorlalte două.

Dacă $\beta = 0$ atunci $A^2 = \alpha A$ de unde $A^n = \alpha^{n-1} A$ are proprietatea (P) pentru orice $n > 1$.

Dacă $\alpha = 0$ atunci $A^2 = -\beta I_2$ și din faptul că $A^{2004} = \beta^{2004} I_2$ are proprietatea (P) rezultă că $\beta = 0$. Se obține că $A^n = O_2$ are proprietatea (P) pentru orice $n > 1$.

b) Putem lua $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Clasa a XII-a

1. Fie $\mathbf{H} \subset \mathbf{C}^*$ astfel de mulțime și $z \in \mathbf{H}$ fixat. Funcția $f: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ definită prin $f(x) = \frac{z}{x}$ este injectivă. Cum \mathbf{H} este finită rezultă că f este surjectivă și deci există $z_0 \in \mathbf{H}$

astfel încât $F(z_0) = z$ de unde $z_0 = 1$. Deci $1 \in \mathbf{H}$. Prin inducție demonstrăm că

$X_n = (((zoz)oz)0...oz) = z/(z)^{n-1}$, compunerea făcându-se de n ori, $n > 0$. Mulțimea acestor compuse este inclusă în \mathbf{H} . Cum \mathbf{H} este finită există i și j astfel încât $X_i = X_j$, adică există un n_z natural

pentru care $z^{n_z} = 1$. Dacă $\mathbf{H} = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$ atunci $zoz_1.zoz_2.\dots.zoz_n = z_1.z_2.\dots.z_n$ și în final $\mathbf{H} = U_n, n > 0$.

2. Cum f admite primitive, f are proprietatea lui Darboux și în consecință $f(\mathbf{R}) = I$ – interval din ipoteză (e^F) = e^f , apoi $f = e^{-F}$ și deci $f(x) > 0$ (\forall) $x \in \mathbf{R}$. Logaritmând găsim

$F(x) = f(x) - \ln f(x)$, (\forall) $x \in \mathbf{R}$ (1). Prin reducere la absurd, arătăm că $1 \notin I$. Dacă există $x_0 \in \mathbf{R}$ cu $f(x_0) = 1$. Din (1) avem și $F(x_0) = 1$. Dar $f(x) = e^{f(x)-F(x)} \geq f(x) - F(x) + 1$, de unde avem $F(x) \geq 1 = F(x_0)$, adică x_0 este punct de minim. Dar $f(x_0) = F'(x_0) = 0$, fals!

Deci $I \subset (1, \infty)$ sau $I \subset (0, 1)$.

a) $f(x) > 1$, (\forall) $x \in \mathbf{R}$. Folosim faptul că funcția $g: (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$, $g(t) = t - \ln t$ este bijectivă, derivabilă și $g' > 0$. Cum $F = g(f)$, găsim $f = g^{-1}(F)$ de unde rezultă că f este derivabilă pe \mathbf{R} .

Derivând (1) găsim $f = f' - f'/f$ și apoi $f'/f - f'/f^2 = 1$ sau $\ln f(x) + 1/f(x) = x + C > 0$ (\forall) $x \in \mathbf{R}$, fals!

b) $0 < f(x) < 1$, (\forall) $x \in \mathbf{R}$. Folosind funcția bijectivă $h: (0, 1) \rightarrow (1, \infty)$, $h(x) = 1/x - \ln(1/x)$, după un raționament asemănător cu cel de la a) se ajunge tot la contradicție.

3. Lemă. Fie o funcție $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ derivabilă cu derivata continuă, $l > 0$ și P un polinom de grad n . Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) P(f(x)) = l$ atunci arătați că există $a \neq 0$ astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{n+1} / x = l(n+1)/a$$

Demonstrația lemei: Dacă Q este o primitivă a lui P atunci avem $\lim_{x \rightarrow \infty} (Q \circ f)'(x) = l$ și, aplicând

regula lui L'Hospital găsim că $\lim_{x \rightarrow \infty} (Q \circ f)(x)/x = l$ de unde $\lim_{x \rightarrow \infty} (Q \circ f)(x) = \infty$.

Vom arăta că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

Pentru aceasta fie $A > 0$. Cum Q este o funcție continuă ea este și mărginită pe intervalul $[0, A]$. Deci există $C > 0$ astfel încât $Q(f(x)) \leq C$ dacă $0 \leq f(x) \leq A$. Dar există x_0 astfel încât $Q(f(x)) > C$ dacă $x > x_0$. $f(x) > 0$ implică faptul că $f(x) > A$, dacă $x > x_0$, ceea ce demonstrează că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

Acum notând cu a coeficientul dominant al lui P , avem $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) / x^{n+1} = a/(n+1)$ și apoi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(f(x)) / [f(x)]^{n+1} = a/(n+1).$$

Deci $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{n+1} / x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{n+1} / Q(f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (Q \circ f)(x) / x = l(n+1)/a$.

Pentru rezolvarea problemei aplicăm lema luând $f(x) = H(x)$, $x \geq 0$ și $P = X^n$.