COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEȘTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a V-a
Craiova, 31 octombrie 2003

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$ astfel încât $a + b \neq 0$. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\in\mathbf{Q}$; 2) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\in\mathbf{Z}$; 3) a și b sunt cuburi perfecte.

prof.V. V. Bărbieru (G.M.9/2003)

2. Fie $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq 2$ și numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots a_n$ astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2003n$. Determinați numerele reale $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ stiind că

$$\sqrt{a_1-x_1}+\sqrt{a_2-x_2}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}-x_{n-1}}+\sqrt{a_n+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}=\sqrt{2003}\,n.$$

prof. Mihai Dicu

3. Fie $x\in\mathbf{R}$ și $n\in\mathbf{N}^*$. Arătați că :

$$\left[\frac{\left[\frac{x}{n}\right]}{n}\right]=\left[\frac{\left[\frac{[x]}{n}\right]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n^2}\right],$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.
Mai rămân valabile relațiile de mai sus dacă $n\in\mathbf{Z}$, $n<0$?

prof. Lucian Tuțescu

***Notă:** Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la10.*
Un punct se acordă din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

(Selecție realizată de prof. Mihai Dicu)

COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEȘTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a V-a
Craiova, 31 octombrie 2003

Clasa a X-a

1. Fie $a > 0$ și f:[0,2a] $\to$ R o funcție concavă.
Arătați că:

a) $(\forall)\ x,y,z \in [0,2a],\ x<y<z \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$

b) Funcția $g:[0, a] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) + f(2a - x)$ este crescătoare.

prof.Gh.Szöllösy (G.M.11/2002)

2. Fie propoziția:"Există șiruri neconstante $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ cu elemente în mulțimea $M \subseteq \mathbf{R}$ astfel încât șirul $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ să fie progresie aritmetică, iar șirul $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ să fie progresie geometrică".
Arătați că:

a) pentru $M = \mathbf{R}$ propoziția este adevărată;
b) pentru $M = \mathbf{Z}$ propoziția este falsă.

prof. Mihai Dicu

3. Fie funcția $f:\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ ce satisface condițiile:

1) $f(1) = 1$;
2) $f(2n) < 10f(n)$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$;
3) $5f(n)f(2n+1) = f(2n)(1+5f(n))$ $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

Se cere:

a) **Calculați $f(2003)$;**
b) **Rezolvați ecuația $f(p) + f(q) = 156$, $p<q$.**

prof. Grama Daniela.

Notă:* *Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la10.
Un punct se acordă din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

(Selecție realizată de prof. Mihai Dicu)

COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEŞTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a V-a

Craiova, 31 octombrie 2003

Clasa a XI-a

1. Fie x_0, y_0, z_0 trei numere reale strict pozitive date şi şirurile (x_n), (y_n), (z_n) date prin recurențele:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n + z_n}{3} \qquad y_{n+1} = \frac{x_n y_n + y_n z_n + z_n x_n}{x_n + y_n + z_n}$$

$$z_{n+1} = \frac{3 x_n y_n z_n}{x_n y_n + y_n z_n + z_n x_n}$$ **pentru orice $n \in \mathbf{N}$.**

Să se arate că şirurile sunt convergente şi să se calculeze limita fiecăruia.

prof.Nicolae Pavelescu (G.M.2/2003

2. Fie o funcție $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică următoarele condiții:

1) $f(1) = 1$;
2) $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (\forall)\, x, y \in \mathbf{R}$;
3) $f(1/x) = 1/f(x) \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R}^*$.

Arătați că :

a) $|f(x)| \leq \frac{1}{2} \quad (\forall)\, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), x \neq 0$;

b) $f(x) = x \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

prof.Mariana Militaru

3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ cu proprietatea cã $\det(A^2 + X^2)$ este pãtrat perfect $(\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$.
Arătați cã $\det(A^3 + X^3)$ este cub perfect $(\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$.
Reciproca este adevărată?
(Se poate folosi lema : Dacă $a, b \in \mathbf{Z}$ astfel încât $ax^2 + b$ este pătrat perfect oricare ar $x \in \mathbf{N}^*$, atunci unul ditre numerele a şi b este pătrat perfect, iar celălalt este nul).

prof. Marius Ghergu

***Nota:** Fiecare problemă se noteaza cu note de la 1 la10.*
Un punct se acordă din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

(Selecție realizată de prof. Mihai Dicu)

COLEGIUL NAȚIONAL "FRAȚII BUZEŞTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ GHEORGHE DUMITRESCU

Ediția a V-a

Craiova, 31 octombrie 2003

Clasa a XII-a

1. Fie $(G,.)$ un grup finit, $G \neq \{e\}$, cu proprietatea:

Oricare ar fi $a,b \in G - \{e\}$, există $c \in G$ astfel încât $b=c^{-1}ac$.

Arătați că: a) $(G,.)$ este comutativ;

b) mulțimea G are exact două elemente.

(G.M.4/2003)

2. a) Determinați o relație de recurență pentru integrala nedefinită

$$I_n = \int \sqrt{x^2+a} \,.\ln\left(x + \sqrt{x^2+a}\right)dx,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \text{ şi } a>0.$$

prof.Cătălin Cristea

b)Calculați primitivele funcției

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{e^{4nx}+e^{2nx}}}$$

prof. Mihai Dicu

3. Arătați cã nu existã funcții $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit o primitivă F cu proprietatea

$$\lim_{x \to -\infty} (F\circ f)(x) = \lim_{x \to -\infty} (f\circ F)(x) = -\infty$$

prof. Marius Ghergu.

***Notă:** Fiecare problemă se notează cu note de la 1 la10.*

Un punct se acordă din oficiu.

Timp de lucru: 2 ore.

(Selecție realizată de prof. Mihai Dicu)