COLEGIUL NATIONAL "FRATII BUZESTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICA
GHEORGHE DUMITRESCU

Editia a IV-a

Craiova, 1 noiembrie 2002

Clasa a IX-a

1. Comparati numerele:

$$a = (3^{1/n} + 5^{1/n} + 7^{1/n})/(4^{1/n} + 5^{1/n} + 6^{1/n})$$

$$b = (6^{1/n} + 7^{1/n} + 8^{1/n})/(5^{1/n} + 7^{1/n} + 9^{1/n}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

prof. Ilie Diaconu,G.M. 4/2002

2. Fie multimea $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \{x\} + \{1/x\} \in \mathbb{Z}^* \}$**, unde** $\{x\}$ **reprezinta partea fractionara a lui** x**.**
Aratati ca A nu contine numere rationale.

prof. Mihai Dicu

3. Daca a,b,c,d sunt numere reale strict pozitive,demonstrati ca

$$[(a + b)/(c + d)]^{1/2} + [(b + c)/(a + d)]^{1/2} + [(c + a)/(b + d)]^{1/2} \geq 4(a + b + c)/s$$

unde $s = a + b + c + d$**.**

prof. Dan Secleman

Nota: *Fiecare problema se noteaza cu note de la 1 la10.*
Un punct se acorda din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

(Selectie realizata de prof. Mihai Dicu)

COLEGIUL NATIONAL "FRATII BUZESTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICA
GHEORGHE DUMITRESCU

Editia a IV-a

Craiova, 1 noiembrie 2002

Clasa a X-a

1. Fie f: R ??R o functie astfel (f o f)(x) = x^3, ∀ x ∈ R.
Sa se arate ca :
a) Exista cel putin o astfel de functie;
b) [f(x)]$^{1/3}$ = f($x^{1/3}$), V x ∈ R;
c) Exista a, b, c ∈ R, distincte, astfel încât:

f(a) + f(b) + f(c) = f(a)·f(b)·f(c).

prof.Florin Rotaru,G.M. 5-6/2002

2. Consideram numerele reale diferite astfel încât ÷ a,b,c Si multimea
A={ f: D_f ?áR| ÷ f(a),f(b),f(c) -numere diferite doua câte doua},
unde D_f este domeniul maxim de definitie al lui f.
Precizati care dintre functiile urmatoare apartine multimii A:
a) functia putere;
b) functia radical;
c) functia sinus;
d) functia cosinus;
e) f:R ?÷R, f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q, m, n, p,q ∈ R.

prof. Mihai Dicu

3. Sa se demonstreze ca orice Sir $(x_n)_{n=h}$ de numere reale care satisface relatia

$$\left|(x_{m+1}x_n - x_{m+n})/x_m x_n\right| =á1/(m+n),\ \forall\ m, n \in N^*,$$

este o progresie geometrica cu $x_1 = 1$.

prof.Dan Popescu

Nota: Fiecare problema se noteaza cu note de la 1 la10.
Un punct se acorda din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

(Selectie realizata de prof. Mihai Dicu)

COLEGIUL NATIONAL "FRATII BUZESTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICA GHEORGHE DUMITRESCU

Editia a IV-a

Craiova, 1 noiembrie 2002

Clasa a XI –a

1. **Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} x - 3y & x + 4y & x - y \\ x + 2y & x & x - 2y \\ x + y & x - 4y & x + 3y \end{pmatrix}$.**

   Sa se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

   prof. Gh. Szöllösy, G.M. 1/2002

2. **Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât det (A) =0%**
   Aratati ca:

   $$\det(A^n + I_2) + \det(A^n - I_2) = j(1/2^{n-2}).(\det(A) + 1)^n.$$

   prof. Dan Secleman

3. **Fie A, B C $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, AB = BA.**
   Daca exista $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\det(A^{2n} + B^{2n}) = 0$, atunci aratati ca matricile A Si B sunt simultan inversabile sau neinversabile.

   prof. Gh. Bordea

Nota: Fiecare problema se noteaza cu note de la 1 la10.
Un punct se acorda din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

(Selectie realizata de prof. Mihai Dicu)

COLEGIUL NATIONAL "FRATII BUZESTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICA GHEORGHE DUMITRESCU

Editia a IV-a

Craiova, 1 noiembrie 2002

Clasa a XII-a

1. **Sa se determine functia continua f :I?©(0, 8) Si intervalul I de numere reale, Stiind ca f(0) = 1 Si 1/f este o primitiva pentru f.**

prof. Ovidiu Pop, G.M. 2/2002

2. **Fie M o multime finita cu cel putin doua elemente.**
   Definiti pe M o lege de compozitie " o " astfel încât sa fie îndeplinite simultan conditiile :
   a) **x o y ?Ž y o x , ∀ x, y ∈ M, x ?Ž y**
   b) **xo (y o z) ?³(x o y) o (x o z), ∀ x, y, z ∈ M.**

prof. Lucian Tutescu

3. **Fie functia f:(0 ,8) ?B R definitaa prin f(x) = (1/x) exp(x^2)**
   Daca F:(0 , 8) ?A R este o primitiva a functiei f, atunci :
   a) **Aratati ca F este functie bijectiva;**
   b) **Calculati lim F(x)/[xf(x)] Si lim $F^2(x)$ /[xf(x)];**
   c) **Calculati lim [$F^{-1}(x)$]/x Si lim [$F^{-1}(x)$]/ln$x$.**

prof. Marin Popa
prof. Mihai Dicu

***Nota:** Fiecare problema se noteaza cu note de la 1 la10.*
Un punct se acorda din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

(Selectie realizata de prof. Mihai Dicu)