COLEGIUL NATIONAL "FRATII BUZESTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICA
GHEORGHE DUMITRESCU

Editia a IV-a
Craiova, 1 noiembrie 2002

Clasa a IX-a

1. Comparati numerele:

$a = (3^{1/n} + 5^{1/n} + 7^{1/n})/(4^{1/n} + 5^{1/n} + 6^{1/n})$

$b = (6^{1/n} + 7^{1/n} + 8^{1/n})/(5^{1/n} + 7^{1/n} + 9^{1/n})$, $n \in \mathbb{N}$, $n = x2$.

prof. Ilie Diaconu, G.M. 4/2002

2. Fie multimea $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \{x\} + \{1/x\} \in \mathbb{Z}^* \}$, unde $\{x\}$ reprezinta partea fractionara a lui x.
Aratati ca A nu contine numere rationale.

prof. Mihai Dicu

3. Daca a,b,c,d sunt numere reale strict pozitive, demonstrati ca

$$[(a + b)/(c + d)]^{1/2} + [(b + c)/(a + d)]^{1/2} + [(c + a)/(b + d)]^{1/2} = 4(a + b + c)/s$$

unde $s = a + b + c + d$.

prof. Dan Secleman

Nota: Fiecare problema se noteaza cu note de la 1 la10.
Un punct se acorda din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

(Selectie realizata de prof. Mihai Dicu)

COLEGIUL NATIONAL "FRATII BUZESTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICA
GHEORGHE DUMITRESCU

Editia a IV-a

Craiova, 1 noiembrie 2002

Clasa a X-a

1. **Fie f: R ??R o functie astfel $(f \circ f)(x) = x^3$, $\forall\ x \in$ R.**
   Sa se arate ca :
   a) Exista cel putin o astfel de functie;
   b) $[f(x)]^{1/3} = f(x^{1/3})$, V $x \in$ R;
   c) Exista a, b, c $\in$ R, distincte, astfel încât:

$$f(a) + f(b) + f(c) = f(a)\cdot f(b)\cdot f(c).$$

prof.Florin Rotaru,G.M. 5-6/2002

2. **Consideram numerele reale diferite astfel încât ÷ a,b,c Si multimea**
   A={ f: D_f ?áR| ÷ f(a),f(b),f(c) -numere diferite doua câte doua},
   unde D_f este domeniul maxim de definitie al lui f.
   Precizati care dintre functiile urmatoare apartine multimii A:
   a) functia putere;
   b) functia radical;
   c) functia sinus;
   d) functia cosinus;
   e) f:R ?÷R, $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, m, n, p,q $\in$ R.

prof. Mihai Dicu

3. **Sa se demonstreze ca orice Sir $(x_n)_{n=h}$ de numere reale care satisface relatia**

$$\left|(x_{m+1} x_n - x_{m+n})/x_m x_n\right| =\acute{a} 1/(m + n) ,\ \forall\ m, n \in N^*,$$

este o progresie geometrica cu $x_1 = 1$.

prof.Dan Popescu

Nota: Fiecare problema se noteaza cu note de la 1 la10.
Un punct se acorda din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

(Selectie realizata de prof. Mihai Dicu)

COLEGIUL NATIONAL "FRATII BUZESTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICA GHEORGHE DUMITRESCU

Editia a IV-a

Craiova, 1 noiembrie 2002

Clasa a XI –a

1. **Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} x-3y & x+4y & x-y \\ x+2y & x & x-2y \\ x+y & x-4y & x+3y \end{pmatrix}$.**

   Sa se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

prof. Gh. Szöllösy, G.M. 1/2002

2. **Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât det (A) =0%**
   Aratati ca:

$$\det(A^n + I_2) + \det(A^n - I_2) = j(1/2^{n-2}).(\det(A) + 1)^n.$$

prof. Dan Secleman

3. **Fie A, B C $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, AB = BA.**
   Daca exista $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\det(A^{2n} + B^{2n}) = 0$, atunci aratati ca matricile A Si B sunt simultan inversabile sau neinversabile.

prof. Gh. Bordea

***Nota:** Fiecare problema se noteaza cu note de la 1 la10.*
Un punct se acorda din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

(Selectie realizata de prof. Mihai Dicu)

COLEGIUL NATIONAL "FRATII BUZESTI"
CRAIOVA

CONCURSUL DE MATEMATICA GHEORGHE DUMITRESCU

Editia a IV-a

Craiova, 1 noiembrie 2002

Clasa a XII-a

1. Sa se determine functia continua f :I?©(0, 8) Si intervalul I de numere reale, Stiind ca f(0) = 1 Si 1/f este o primitiva pentru f.

prof. Ovidiu Pop, G.M. 2/2002

2. Fie M o multime finita cu cel putin doua elemente.
Definiti pe M o lege de compozitie " o " astfel încât sa fie îndeplinite simultan conditiile :

a) x o y ?Žyox , $\forall$ x, y $\in$ M, x ?Žy

b) xo (y o z) ?³(x o y) o (x o z), $\forall$ x, y, z $\in$ M.

prof. Lucian Tutescu

3. Fie functia f:(0 ,8)B ?BR definitaa prin f(x) = (1/x) exp(x^2)
Daca F:(0 , 8)A ?AR este o primitiva a functiei f, atunci :

a) Aratati ca F este functie bijectiva;

b) Calculati lim F(x)/[xf(x)] Si lim F^2(x) /[xf(x)];

c) Calculati lim [F^{-1}(x)]/x Si lim [F^{-1}(x)]/ln$x$.

prof. Marin Popa
prof. Mihai Dicu

***Nota:** Fiecare problema se noteaza cu note de la 1 la10.*
Un punct se acorda din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

(Selectie realizata de prof. Mihai Dicu)