SOLUTII

Clasa a IX-a

1. **Lema**: Daca a, b, c, d sunt numere naturale astfel incat ÷ a, b, c, d atunci

$$a^{1/n} + d^{1/n} < b^{1/n} + c^{1/n}.$$

Lema se demonstreaza grupand astfel $c^{1/n} – a^{1/n} > d^{1/n} - b^{1/n}$ si amplificand cu conjugata in fiecare membru.
Tinand seama de lema se demonstreaza ca $a < 1$ si $b > 1$ si drept urmare $a < 1 < b$.

2. **Lema**: Daca x R^* atunci x + 1/x Z == {x} + {1/x} Z.
(Vezi manualul de clasa a IX-a autor V. Schneider, ex. 14, pag. 66)
Daca presupunem ca x din A este rational,din lema rezulta ca $x + 1/x = k$ intreg si in consecinta ecuatia $x^2 – kx + 1 = 0$ are radacinile rationale. Atunci Δ este patrat perfect : $k^2 – 4 = p^2$ adica $k^2 – p^2 = 4$ ceea conduce la $k = 2$ au $k =-2$ si apoi la $x = 1$ sau $x = -1$. Acest lucru este imposibil deoarece ar duce la $\{x\} + \{1/x\} =0$.

3. Se aplica inegalitatea mediilor astfel:

$$[(a + b)/(c +d)]^{1/2} \leq (1/2)[1 + (c + d)/(a+b)] = (1/2)\ s/(a + b).$$

Se inverseaza aceste inegalitati si se aduna.

Clasa a X-a

1. a) $f(x) = | x|^{\alpha}$ pentru $x \geq 0$ si $f(x) = - |x|^{\alpha}$ unde $\alpha = 3^{1/2}$.
Efectuam substitutia $x \to x^{1/3}$ si apoi compunem cu f.
c) Orice element al multimii { -1, 0, 1 } verifica relatia de la b) si cum f este bijectiva rezulta ca f({-1, 0, 1} = {-1, 0, 1}. {a, b, c} = {-1,0, 1}.

2. ***Lema***: Daca ÷ a, b, c si $f:D_f \to R$ este o functie astfel incat ÷f(a), f(b),f(c) atunci punctele (diferite) A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c)) sunt coliniare.
Consecinta: Functiile strict convexe sau strict concave nu se afla in aceasta multime.Deci excludem functia putere si functia radical de ordin par.Pentru $b = 0$ retinem functia putere si functia radical de ordin impar care au centru de simetrie originea si deci graficul lor contine puncte coliniare.
Si functiile sinus si cosinus au centre de simetrie. Din relatia

$$\sin (b – r) + \sin(b + r) = 2 \sin b$$

rezulta ca aceasta functie indeplineste conditia pentru $b=k\pi$ sau $r = 2k\pi$, k intreg. Analog functia cosinus.
Pentru ultima functie, din relatia $f(b – r) + f(b + r) = 2 f(b)$,gasim ca ea corespunde in cazurile $m = n = 0, p \neq 0$ si $m \neq 0$ cu $6mb +n =0$.

3. Pentru m,n c N* oarecari,avem:

$$|x_{m+1}/ x_m - x_{n+1} / x_n | \le |(x_{m+1} x_n - x_{m+n})/x_m x_n | + | (x_{n+1}x_m - x_{m+n})/x_m x_n | \le 2/(m+n)$$

Definim $y_n = x_{n+1} /x_n$ si vom dovedi ca $y_n = q$. Presupunand ca ar exista $y_m \neq y_n$ atunci am avea

$$0 < a = | y_m - y_n | \le | y_m - y_p | + | y_p - y_n | \le 2/(m+n) + 2/(n+p) < 4/p ,$$

adica $p < 4/a$, oricare ar p c N*,absurd.

Inlocuind acum $x_n = x_1 q^{n-1}$, obtinem $| q(1-1/x_1)| \le 1/ (m+n)$ pt. orice m,n naturali, de unde $x_1 =1$.

Clasa a XI-a

1. Clar ca putem scrie $A = xB + yC$ cu $BC = CB = O_3$ si $B^n = 3B$ iar $C^{2n+1} = 24^n C$, $C^{2n} = 2^{n-1}C^2$. Aplicam apoi binomul lui Newton.

2. Lema: Daca X,Y c $M_2(C)$ atunci:

$$\det(X + Y) + \det(X + Y) = 2(\det(X) + \det(Y)).$$

Conform lemei avem:

$$\det(A^n + I_2) + \det(A^n - I_2) = 2[(\det(A))^n + 1].$$

Dar folosind inegalitatea $a^n + b^n \ge (1/2^{n-1})(a + b)^n$ obtinem ca

$$2[(\det(A))^n + 1] \ge (1/2^{n-2})(\det(A) + 1)^n.$$

3. Daca $\det(A) = \det(A) = 0$ atunci ambele matrici sunt neinversabile.

Daca $\det(A) \neq 0$ atunci avem $\det(I_2 + (A^{-1}B)^{2n}] =0$. Notand $A^{-1}B = C$ si considerand ε_k radacinile ecuatiei $x^{2n} + 1 =0$ obtinem $0 = \det(C^{2n} + I_2) = \prod \det(C - \varepsilon_k I_2) =0$. De aici rezulta ca exista p, $1\le p\le n$ astfel incat $\det(C - \varepsilon_k I_2) = 0$. Cum C c $M_2(R)$, ecuatia

$$\det (xI_2 - C) = x^2 + ax + b = 0$$

cu coeficientii reali $a = tr(C), b = \det(C)$ are radacinile α_1, α_2 sunt numere complexe conjugate care sunt si radacinile ecuatiei $x^{2n} + 1 =0$ si in consecinta $\det(C) = b = \alpha_1\alpha_2 = 1$. De aici $\det(A^{-1}B) = 1$ si, imediat, $\det(B) = \det(A) \neq 0$.

Clasa a XII-a

1.a) 1/f este o primitiva a lui f implica $(1/f)' = f$ de unde $(-2f')/f^3 = 2$ sau $(1/f^2)' = 2$. Gasim $f^2 = 1/(2x + C)$ si cum C = 1 rezulta ca $f(x) = (2x + 1)^{1/2}$ iar $I =(-1/2, \infty)$.

2.Consideram $f: M\to M$ bijectie fara puncte fixe (adica nu exista a c M a.i. $f(c) = c$). Definim legea de compozitie "o" prin $xoy = f(x)$, $\forall$ x, y c M.

a) Daca $x \neq y$ atunci $f(x) \neq f(y)$ si deci $xoy \neq yox$.

b) $xo(yoz) = xof(y) = f(x)$ iar $(xoy)o(xoz) = f(x)of(x) = f(f(x))$.

Deorece f nu are puncte fixe rezulta ca $f(x) \neq f(fx))$, $\forall$ x c M.

3.a) Deorece $F'(x) = f(x) > 0$ rezulta ca F este strict crescatoare (deci injectiva). Fiind continua, F are limite la 0 si la ∞.
Aplicand teorema lui Lagrange functiei F pe $[n, n+1]$ rezulta avem

$F(n + 1) - F(n) = f(c_n) > 1/(n + 1)\ \exp(n^2)$. Dand valori lui n si insumand obtinem

$F(n) > F(1) + ½ \exp(1^2) + ... + 1/n \exp(n-1)^2 > 1/n \exp(n-1)^2 \to \infty$ si in consecinta $\lim F(x) = \infty$.
Procedand la fel pentru functia $G(x) = F(1/x)$ gasim ca $\lim F(x) = -\infty$.
Avand proprietatea lui Darboux deducem ca F este surjectiva si ca urmare bijectiva.

b) Fiind nederminari de tip ∞/∞ se aplica regula lui L' Hospital. Gasim ca prima este egala cu 0 iar a doua este ∞.

a) Se procedeaza ca mai sus efectuand mai intai schimbarea de variabila $x \to F(x)$ si se obtin aceleasi rezultate.